

Kontinuum, odnosno mnoštvo realnih brojeva

Centralni pojam matematičke analize je svakako pojam funkcije, preslikavanja. Saznanja o funkcijama su u mnogome doprinela razvoju savremene civilizacije Zapada svojim raznovrsnim i mnogobrojnim primenama u tehnici, tehnologijama, informatici i komunikacijama, ali i u "društvenim" naukama, ekonomiji i ekologiji na primer. Jasno, i obrnut proces, kojim zahtevi primenjenih nauka utiču na razvoj matematičke analize, takodje je bitna odlika savremenog doba. Funkcionalna zavisnost veličine y s obzirom na promenljivu x , u oznaci $y = f(x)$, podrazumeva znanje o prirodi promenljive x i njene slike y . U ovom kursu obe navedene veličine biće elementi skupa realnih brojeva, kojeg ćemo označavati sa \mathbb{R} .

Uobičajena je predstava o realnim brojevima kao o mnoštvu koje u sebi uključuje "lako zamisliva" mnoštva prirodnih, celih i racionalnih brojeva, ali i teže zamislive veličine kao što su brojevi označeni sa $\pi, e, \sqrt{2}, \dots$. Naš zadatak je da na precizan način definišemo mnoštvo realnih brojeva i da razumemo osnovne osobine koje ga krase.

Istorijski razvoj, ukratko

Pojam broja u uskoj je vezi sa količinom, videti primer o vranama koje "broje" do tri, kao i etimološko tumačenje: reč broj je nastala od glagola brijati, odnosno seći. Pretpostavlja se da su u davnini stočari "brojali" grla u stadu urezivanjem u komad drveta po jedne crtice za svako grlo. Prirodni brojevi se, tako, u svesti ljudskog društva javljaju pre pojave pisma. Mi smo u mogućnosti da se uverimo kako su Vavilonci i Egipćani znali da računaju sa razlomcima. Ipak, do zlatnog perioda antike (VI i V vek pre Hrista), pojam broja po svemu sudeći nije bio sasvim izdvojen od njegove konkretne primene u pojedinim zadacima od praktičnog značaja. Tek sa Pitagorom počinje posmatranje brojeva kao zasebnih entiteta, što je sažeto u njegovoj slavnoj misli da je u osnovi svega broj. Ipak, odvajanje pojma broja od pojma količine za antički um nije bilo moguće. Iz Euklida znamo da se nesamerljive dužine "ne odnose kao brojevi". U tom smislu su razumljive kontroverze nastale "otkrićem" nesamerljivosti dijagonale jediničnog kvadrata.

Udvođenje nule i negativnih brojeva se javlja u VI veku nove ere u Indiji, a tek od XVI veka počinju se javljati pitanja koja će dovesti do formalnog zasnivanja kontinuuma. Peanovo aksiomatsko zasnivanje skupa prirodnih brojeva datira u 1889. godinu. (Dirihleov princip, logički ekvivalent principu matematičke indukcije: ako imamo više jabuka nego korpi i stavimo ih sve u korpe, onda će barem jedna korpa imati više od jedne jabuke.)

Na ovom mestu citiramo slavnog matematičara A. J. Hinčina: "Pred našim očima se svet realnih brojeva razvija kao složena konstrukcija, bogata raznovrsnim pojedinostima; proučavanje te konstrukcije nauka ne može smatrati završenim ni do danas"

Motivacija za proširenje klase racionalnih brojeva je očigledna pri posmatranju problema merenja duži koje dovodi do broja $\sqrt{2}$. Pokušajmo najpre da strukturu racionalnih brojeva upotpunimo "algebarskim" brojevima, kakav je i koren iz dva, ali i broj kojim se definiše zlatni presek ($\frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Algebarski brojevi su rešenja jednačina oblika $P(x) = 0$, gde je $P(x)$ polinom sa celobrojnim koeficijentima. (Na primer $x^2 + x - 1 = 0$.) Algebarske operacije nad algebarskim brojevima za rezultat imaju algebarski broj. Ključni trenutak u izgradnji realnih brojeva javlja se upravo na ovom mestu. U primenama i u teoriji nužno je uvesti još jednu operaciju. Ona nije algebarska i nije jednostavno obrazložiti je sa onim detaljima kojim je moguće preći put od prirodnih brojeva do racionalnih, pa i algebarskih. Ta operacija, koja se pojavila tek u XVII veku, je operacija graničnog prelaza, odnosno granične vrednosti. Upravo su naponi da se takva operacija razume doveli do prevazilaženja izvesnih matematičkih paradoksa antičkog sveta kao i do zasnivanja matematičke analize, nasuprot algebri i aritmetici. Pojam granične vrednosti, obrazlagan i ispitivan od strane najvećih umova Zapada postavio je čvrste temelje primenama matematike u fizici, a posebno mehanici, što je u znatnoj meri uticalo na tok industrijske revolucije u XIX veku, a zatim i informatičke revolucije u XX veku.

Elementarni primer kojim se opravdava neophodnost uvođenja brojeva definisanih graničnom vrednošću je proces izračunavanja dužine kružne linije (obima kruga), pravilnim mnogouglovima upisanim u i opisanim oko datog kruga. Antički problem, po svojoj suštini, čije rešenje zahteva nov pogled, omogućen tek novim shvatanjem matematike iznjedrenim u kulturi Zapadne Evrope XVII veka. Broj pi, o kome je ovde reč nije algebarski, a to je dokazano tek 1882. godine (Linderman). U XVII veku Ludolf fon Cojlen je izračunao pi na 35 tačnih mesta, pa otud njegov pučki naziv Ludolfov broj. Arhimed izračunava broj pi opisanim i upisanim mnogouglovima. Pravilan mnogougao sa 96 stranica opisan oko kružnice daje $3,14271 \dots \sim 22/7$ (najbolja aproksimacija razlomkom čiji su brojilac i imenilac manji od 100), a upisan u kružnicu daje $3,14103 \dots$. Brojeve koji nisu algebarski zvaćemo transcendentnim. Jasno, uvođenje transcendentnih brojeva je samo motiv za definisanje teorije realnih brojeva, ali ne i konačni korak u njenoj izgradnji. Mi ćemo teoriju realnih brojeva zasnovati aksiomatski, pri čemu će odlučujuću

ulogu u izgradnji odigrati takozvani aksiom neprekidnosti ili kontinuuma i njemu ekvivalentni iskazi.

0 reprezentaciji brojeva

Svaki racionalni broj ima periodični ili konačni decimalni zapis:

$$1/3 = 0,3333333\dots \quad 93/74 = 1,2567567567567567\dots$$

Sa druge strane, broj zapisan sa $0,2200022222000002222220\dots$ je iracionalan broj. U ovom slučaju očigledno postoji algoritam, pravilo kojim se generišu brojke u ovom decimalnom zapisu.

Napomena: U decimalnom zapisu broja vršićemo identifikaciju broja koji se završava sa beskonačnim nizom uzastopnih devetki i odgovarajućeg broja koji se završava beskonačnim nizom uzastopnim nula:

$$-41,540679999999999 = -41,54068000000.$$

Ipak, kao što smo naveli, prelaz sa racionalnog skupa na skup realnih brojeva podrazumeva beskonačnu zalihu razlomaka:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots \quad (\text{Vijet, 1593.})$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots} \quad (\text{Wallis, 1650})$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \quad (\text{Gregori, 1671., Lajbnic 1673.})$$

0 beskonačnom broju elemenata skupa (Vidim, ali ne verujem)

Krajem XIX veka, Georg Kantor pokazuje prebrojivost skupova celih i racionalnih brojeva konstrukcijom odgovarajućih uzajamno jednoznačnih preslikavanja. On daje naziv alef nula klasi skupova koji imaju onoliko elemenata koliko ima skup prirodnih brojeva. Oznaka za alef nula je \aleph_0 . Kantor je pokazao da skup realnih brojeva nije prebrojiv argumentom takozvanog "dijagonalnog preseka". Navedimo primer jedne takve konstrukcije. Pretpostavićemo da se svi realni brojevi, na primer iz intervala $(0, 1)$, mogu poredjati u niz, a zatim ćemo konstruisati broj koji se ne nalazi u tom nizu. Zaključujemo da je beskonačnost realnih brojeva "veća od" alef nula. Označimo je sa c . Da li je c "najmanji" beskonačni broj "veći od" alef nula, odnosno da li je c jednak sa alef jedan? Po svemu sudeći nije moguće dokazati ni potvrđan ni odrećan odgovor na ovo pitanje.

Pri izgradnji celih brojeva korišćenjem prirodnih brojeva (definisanih, na primer, Peanovim skupom aksioma) dovoljno je koristiti uređjene parove prirodnih brojeva, a za izgradnju racionalnih brojeva dovoljno je koristiti uređjene parove celih brojeva. Međutim, do realnih brojeva nije moguće doći pomoću parova racionalnih brojeva. Za definisanje realnog broja (koji nije racionalan) moramo koristiti beskonačno mnogo izvesnih racionalnih brojeva. To je veoma značajna činjenica koju valja shvatiti i usvojiti.

Napomena: Može se pokazati da "izračunljivih brojeva" ima "samo" prebrojivo mnogo.

Presek u kontinuumu

Dedekind uvodi presek u klasi realnih brojeva 1872. godine. Razmotrimo neke detalje pojma preseka.

Neka su a i b racionalni brojevi, $a < b$. Tada je njihova aritmetička sredina $c = (a + b)/2$ takodje racionalan broj. Ovu osobinu nemaju celi brojevi. Štaviše, s obzirom da je $a < c < b$, možemo "generisati" nove racionalne brojeve c_1 i c_2 tako da važi: $a < c_1 < c < c_2 < b$. Prema tome, za svaka dva racionalna broja a, b , $a < b$, postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva većih od a a manjih od b . Odavde sledi, na primer, da ne postoji najmanji pozitivan broj (0 je neutralni element za sabiranje, a pozitivni brojevi su brojevi x sa osobinom $0 < x$).

Neka je a zadat (fiksiran) racionalan broj. Klasu racionalnih brojeva možemo podeliti na dve potklase. U jednoj se nalaze brojevi manji od a , a u drugoj brojevi koji su veći od a . Na taj način smo izvršili presek u području racionalnih brojeva. Po volji, možemo broj a svrstati u jednu od klasa.

Definišimo sada presek na sledeći način. U jednu klasu (klasu A) uvrstićemo negativne brojeve i one pozitivne brojeve čiji je kvadrat manji od broja 2, a u drugoj klasi (klasi B) neka se nadju brojevi čiji je kvadrat veći od 2. U ovom slučaju, niti klasa A ima najveći element, niti klasa B ima najmanji element.

Dokaz: Neka je a proizvoljan pozitivan racionalan broj i neka je $b = 2\frac{a+1}{a+2}$. Pretpostavimo da broj a pripada klasi B , odnosno $a^2 > 2$. Lako se dobija

$$b^2 - 2 = 2\frac{a^2 - 2}{(a + 2)^2} \quad , \quad b - a = \frac{2 - a^2}{a + 2} \quad ,$$

odakle sledi da je b element klase B i da je $b < a$. Da u klasi A ne postoji najveći element dokazuje se analogno.

Zaključak: Presek u klasi racionalnih brojeva definiše nešto što nije racionalan broj.