UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Maja Mlinar

Dedekindov presek

Seminarski rad B

Novi Sad 2009.

Mentor: Nenad Teofanov

Sadržaj

Uvod

Zadatak ovog seminarskog rada je da se na što bolji način objasni Dedekindov presek. Polazeći od najosnovnijih teza, pa preko nešto složenijih, kao i urađenih zadataka, pokušaću da što bolje rešim ovaj zadatak, odnosno da na što bolji način, objasnim suštinu Dedekindovog preseka. Rad bi trebao da se sastoji od dve glave, kao i nekoliko podglava. Kao pomoć ću koristiti nekoliko literatura u vezi sa predmetima Uvod u analizu i Analizu1.

Glava I

Aksiomatsko zasnivanje skupa $\mathbb{R}$

U ovoj glavi ćemo poći od osnovne definicije skupa pririodnih brojeva, zatim ćemo preći i na skup celih i racionalnih brojeva kako bismo na što bolji način napravili uvod u celu priču.

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je svaki skup u kome su definisane dve binarne operacije + i $\cdot$ (zovemo ih sabiranje i množenje) i binarna relacija $\leq$ (manje i jednako) tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

1. Osobine operacije sabiranja

1.1 $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$ $x + y = y + x$ (komutativnost sabiranja),
1.2 $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost sabiranja),
1.3 $(\exists 0 \in \mathbb{R})\ (\forall\, x \in \mathbb{R})$ $x + 0 = 0 + x = x$ (postojanje neutralnog elementa za sabiranje),
1.4 $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ (\exists (-x) \in \mathbb{R})$ $x + (-x) = (-x) + x = 0$ (postojanje inverznog elementa za sabiranje).

2. Osobine operacije množenja

2.1 $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$ $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativnost množenja),
2.2 $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asocijativnost množenja),
2.3 $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ (\forall\, x \in \mathbb{R})$ $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (postojanje neutralnog elementa za množenje),
2.4 $(\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})\ (\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R})$ $x + x^{-1} = x^{-1} + x = 0$ (postojanje inverznog elementa za množenje).

3. Odnos operacija + i ·

3.1 $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})$ $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributivnost množenja prema sabiranju)

4. Osobine relacije ≤

4.1 $(\forall\, x \in \mathbb{R})$ $x \leq x$ (refleksivnost relacije $\leq$),
4.2 $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$ $x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimetričnost relacije $\leq$),
4.3 $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{R})$ $x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (tranzitivnost relacije $\leq$),
4.4 $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$ $x \leq y \lor y \leq x$ (totalnost uređenja).

5. Odnos operacija + i · i relacije ≤

5.1 $(\forall\ x, y, z \in \mathbb{R})\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ (kompatibilnost relacije ≤ u odnosu na sabiranje),

5.2 $(\forall\ x, y \in \mathbb{R})\ (0 \leq x \land 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (kompatibilnost relacije ≤ u odnosu na množenje).

6. Kompletnost (neprekidnost) skupa ℝ

Neka su X i Y neprazni podskupovi skupa ℝ sa osobinom da je

$$(\forall\ x \in \mathbb{X})\ (\forall\ y \in \mathbb{Y})\quad x \leq y.$$

Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je $(\forall\ x \in \mathbb{X})\ (\forall\ y \in \mathbb{Y})\quad x \leq c \leq y$.

1.1 Skup prirodnih brojeva

Skup elemenata $(\mathbb{N}, f, 1)$ u kome su zadovoljene aksiome Peana (Peano):

1. Postoji preslikavanje $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvo da je $f(n)$ sledeći broj od n („sledbenik")
2. Ako je $f(n)=f(m)$, tada je $n = m$
3. $1\in \mathbb{N}$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) \neq 1$
5. princip indukcije (ako je skup $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da $1 \in S$, i ako ne S povlači $f(n)\in S$, tada je $S= \mathbb{N}$)

čini skup ***prirodnih brojeva***.

Podsetimo se: *Skup $X \subseteq \mathbb{R}$ je **induktivan** ako važi*
$(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (x \in X \Rightarrow x + 1 \in X)$.

- **Skup ℕ prirodnih brojeva je najmanji induktivan podskup skupa ℝ koji sadrži 1. (to jest, on je presek svih induktivnih podskupova skupa ℝ koji sadrže 1.)**

Stav 1. Ako skup $(\mathbb{N}, f, 1)$ zadovoljava Peanove aksiome, tada postoji jedno i samo jedno preslikavanje $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i takođe jedno i samo jedno preslikavanje
$\cdot: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tako da za sve prirodne brojeve m i n važi

$$m + 1= f(m), \qquad m + f(n)= f(m+n)$$

$$m \cdot 1= m, \qquad m \cdot f(n)= mn+m.$$

Relacija „manje“ u oznaci „<“, u skupu $\mathbb{N}$ definiše se na sledeći način:
$n<m$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $n + k = m$.

Posmatrajmo dva skupa $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ i $\mathbb{N}' = \{1', 2', 3', ...\}$ u kojima važe Peanove aksiome, između kojih je uspostavljena bijekcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$, takva da je $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$,
$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ i $m \leq n \Rightarrow \varphi(m) \leq \varphi(n)$.
(Jasno, $m \leq n$ znači da je ili $m<n$ ili $m=n$.)

1.2 Skup celih brojeva

Definicija 1. Skup celih brojeva je skup $\mathbb{Z} = \mathbb{N}' \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$, gde $0 \notin \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$.

U nastavku uvodimo operacije sabiranja i množenja u skupu $\mathbb{Z}$.
Ako su brojevi $m, n \in \mathbb{N}$ ili $m', n' \in \mathbb{N}'$, tada je zbir $m + n$ u Z isti kao u $\mathbb{N}$, odnosno $m' + n'$ u $\mathbb{N}'$. Neka je $n' \in \mathbb{N}'$, tada postoji broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi(n) = n'$ i neka je $m \in \mathbb{N}$; po definiciji uvodimo zbir $m + n$ na sledeći način

$$m + n \begin{cases} k, \quad m = n + k & \text{ako je } m > n, \\ 0 & \text{ako je } m = n, \\ \varphi(p), \quad n = m + p & \text{ako je } m < n. \end{cases}$$

Takođe, uvodimo sabiranje sa 0 („nulom“) na sledeći način

$m + 0 = 0 + m = m;$ $\quad n' + 0 = 0 + n' = n';$ $\quad 0 + 0 = 0.$

Bez teškoća se proverava da je $(\mathbb{Z}, +)$ Abelova grupa sa neutralnim elementom 0, i inverznim (suprotnim) elementom $-n := \varphi(n)$, za $n \in \mathbb{N}$, odnosno $-n' := \varphi^{-1}(n')$ za $n' \in \mathbb{N}'$, odnosno

$(\forall n' \in \mathbb{N}')\ n' = -n$ odnosno $\mathbb{N}' = -\mathbb{N}$.

Ako su brojevi $m, n \in \mathbb{N}$, tada je proizvod $m \cdot n$ u $\mathbb{Z}$ isti kao u $\mathbb{N}$. U opštem slučaju, uzimamo po definiciji

$m \cdot (-n) = (-n) \cdot m = -(mn),$ $\quad (-m)(-n) = m \cdot n,$

$0 \cdot m = m \cdot 0 = 0\ (-m) = (-m) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0.$

U skupu $\mathbb{Z}$ definiše se relacija < na sledeći način

a) $(\forall\ m \in \mathbb{N})\ -m < 0 < m$;
b) $(\forall\ m \in \mathbb{N})\ (\forall\ n \in \mathbb{N})\ m' < n' \Leftrightarrow m > n$.

Relacija $\leq$, data tako da je $(a \leq b) \Leftrightarrow ((a = b) \vee (a < b))$ jeste relacija poretka u skupu $\mathbb{Z}$.

1.3. Skup racionalnih brojeva

Da bi se definisao skup racionalnih brojeva, polazimo od relacije ekvivalencije ρ u skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ definisane na sledeći način

$((p_1, q_1)\ \rho\ (p_2, q_2)) \Leftrightarrow (p_1\ q_1 = q_1\ p_2)$, gde $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ a $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.

Definicija 2. Skup racionalnih brojeva, Q, je skup količnik $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \rho$.

Jedan racionalan broj je jedna klasa ekvivalencije u $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \rho$. Označavamo je sa $[(p, q)]$, dok je (p, q) predstavnik klase.

Operacija sabiranja i množenja, kao i relacija poretka u skupu Q, definišu se na sledeći način:

(1) sabiranje + : $[(p, q)] + [(r, s)] = [(ps + qr, qs)]$;
(2) množenje $\cdot$: $[(p,q)] \cdot [(r, s)] = [(pr, qs)]$;
(3) relacija poretka $\leq$: $([(p,q)] \leq [(r,s)]) \Leftrightarrow p \cdot s \leq r \cdot q$.

Stav 2. Operacije (1) i (2) i relacija (3) ne zavise od izbora predstavnika klase.

U skupu racionalnih brojeva važe aksiome (R 1) - (R 14), ali aksioma (R 15) ne važi. Preslikavanje $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ je injekcija koja očuvava relaciju poretka i algebarsku strukturu.

Glava II

Presek

U ovoj glavi cemo preći na nešto složenije stavove kako bismo na što bolji način objasnili suštinu Dedekindovog preseka. Kroz par definicija, kao i rešene zadatke, definisaćemo sabiranje i množenje preseka, pojam maksimalnog elementa nekog skupa.

Definicija 1. ***Presek α*** u skupu $\mathbb{Q}$, čini podskup skupa racionalnih brojeva, koji ima sledeća svojstva:

1) skup α sadrži bar jedan racionalan broj, i $\alpha \neq \mathbb{Q}$;
2) ako je $a \in \alpha$ i $b < a$, $b \in \mathbb{Q}$, tada je i $b \in \alpha$;
3) u skupu α ne postoji najveći elemenat (maksimum).

Definicija 2. *Elemenat $a \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, je maksimalan (najveći) elemenat skupa A ako je za sve $x \in A$,*

$$x \subseteq a.$$

Tada pišemo $a = \max A$.

* Neka je r racionalan broj i neka je $\alpha = \{p | \ p \in \mathbb{Q},\ p < r\}$. Tada je α presek u $\mathbb{Q}$, koji ćemo označavati sa r *.

Definicija 3. Neka su α i β preseci u $\mathbb{Q}$. Kažemo da je $\alpha < \beta$ ($\beta < \alpha$) ako postoji racionalan broj p takav da je $p \in \beta$ i $p \notin \alpha$, ($p \in \alpha$ i $p \notin \beta$), što povlači $\alpha \subset \beta$ ($\beta \subset \alpha$).

(4) $\alpha \leq \beta$ označava $\alpha = \beta$ ili $\alpha < \beta$, dakle, $\alpha \subseteq \beta$.
$\alpha \geq \beta$ označava $\beta \leq \alpha$, dakle, $\beta \subseteq \alpha$.

Ako je $\alpha > 0^*$, tada je α pozitivan presek u $\mathbb{Q}$, a ako je $\alpha \geq 0^*$ tada je α nenegativan presek u $\mathbb{Q}$.

U nastavku definišemo sabiranje i množenje preseka.

Sabiranje u skupu preseka definiše se na sledeći način:

(5) $\alpha_1 + \alpha_2 = \{x + y \mid x \in \alpha_1, y \in \alpha_2\}$ (α_1 i α_2 su preseci).

Množenje u skupu preseka koji su veći od 0^* definiše se na sledeći način:

(6) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \{z \mid z \leq 0 \ \vee \ (z = x \cdot y;\ x > 0,\ x \in \alpha_1, \wedge\ y > 0,\ y \in \alpha_2)\}$.

Apsolutna vrednost preseka α je presek $|\alpha|$ takav da važi:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{za } \alpha \geq 0^*, \\ -\alpha & \text{za } \alpha < 0^*, \end{cases}$$

gde je $-\alpha$ inverzni elemenat elementa α u odnosu na operaciju sabiranja. Za svako α je $|\alpha| \geq 0^*$ i $|\alpha| = 0^*$ ako i samo ako je $\alpha = 0^*$.

Zadatak 1. Inverzni elemenat u odnosu na sabiranje za presek α u $\mathbb{Q}$ jeste presek $-\alpha$ dat sa

(7) $-\alpha = \{-x \in \mathbb{Q} \mid x \in (\mathbb{Q} \setminus \alpha), x \neq y$ (gde je y najmanji elemenat u skupu $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ ako takav postoji)$\}$.

Pokazati.

Resenje: Pokazaćemo prvo da je skup $-\alpha$ presek.

1) Skup $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ nije prazan jer bi u suprotnom bilo $\alpha = \mathbb{Q}$ što je nemoguće (α je presek). Znači, na osnovu (7) važi

$(\exists\, y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha) \Rightarrow (-y \in (-\alpha))$, što znači da skup $-\alpha$ nije prazan.

Takođe iz

$(\exists\, z \in \alpha)\ z \notin \mathbb{Q} \setminus \alpha \Rightarrow -z \notin (-\alpha)$

Sledi da $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.

2) Neka $a \in (-\alpha)$ i neka postoji $b \in \mathbb{Q}$, takvo da je $b < a$. Treba pokazati da $b \in (-\alpha)$. U daljem dokazu koristićemo tvrđenje: ako $x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$, gde je α presek i $y > x$ tada i $y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$. (Dokaz se izvodi kontradikcijom). Na osnovu tog tvrđenja i (7) važi

$a \in (-\alpha) \Rightarrow -a \in \mathbb{Q} \setminus \alpha \Rightarrow -b \in \mathbb{Q} \setminus \alpha$ (jer je $-b > -a$).

prema tome $b = -(-b) \in -\alpha$

3) Skup α kao presek u $\mathbb{Q}$ nema najveći elemenat. Ako postoji najmanji elemenat u skupu $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ tada on ne pripada skupu $-\alpha$ po definiciji. Ako skup $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ nema najmanji elemenat tada

$(\forall\, x \in \mathbb{Q} \setminus \alpha)(\exists\, x' \in \mathbb{Q} \setminus \alpha)\ x' < x$. To znači da

$(\forall\ (-x) \in -\alpha)\ (\exists\ (-x') \in -\alpha)\quad -x' > -x,$

odakle sledi da $(-\alpha)$ nema najveći elemenat.

Treba sada još pokazati da važi $\alpha + (-\alpha) = 0^*$.

Označimo sa $\gamma := \alpha + (-\alpha)$ i pokažimo da je $\gamma \leq 0^*$ i da je $0^* \leq \gamma$. Zaista,

$z \in \gamma \Rightarrow (\exists\ x \in \alpha)\ (\ y \in -\alpha)\quad z = x + y.$

Na osnovu implikacija

$y \in (-\alpha) \Rightarrow -y \in \mathbb{Q} \setminus \alpha \Rightarrow -y \notin \alpha \Rightarrow -y > x$

sledi da je $x + y < 0$, pa $z = x + y \in 0^*$, što znači da je $\gamma \subset 0^*$.

Obrnuto ako $(-\varepsilon) \in 0^*$, to znači da je $-\varepsilon < 0$ ili $\varepsilon > 0$.

Tada postoji $x \in \alpha$ takvo da $x + \varepsilon$ ne pripada α. Zaista ako pretpostavimo suprotno, tj. da za

$(\forall\ x \in \alpha)\quad x + \varepsilon \in \alpha,$

tada važi $x + \varepsilon \in \alpha \Rightarrow x + 2\varepsilon \in \alpha \Rightarrow x + 3\varepsilon \in \alpha \Rightarrow \ldots \Rightarrow x + n\varepsilon \in \alpha$. Kako je α presek, postoji $y \notin \alpha$ i $y > x + n\varepsilon$ za svako n odnosno $y - x > n\varepsilon$ za svako n, što daje kontradikciju, jer $\mathbb{Q}$ nije ograničen.

Ako označimo sa $z := x + \varepsilon \notin \alpha$, $(x \in \alpha)$, tada $z \in \mathbb{Q}$, odnosno $-z \in (-\alpha) \Rightarrow (-x - \varepsilon) \in (-\alpha)$, tako iz zapisa $-\varepsilon = x + (-x - \varepsilon)$ sledi $-\varepsilon \in \gamma$ odnosno $0^* \subset \gamma$.

Ako su α_1 i α_2 proizvoljni preseci, tada se njihov proizvod definiše na sledeći način

$$(8)\quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \begin{cases} -(|\alpha_1|\ |\ \alpha_2|) & \text{ako} \quad \alpha_1 < 0^*,\ \alpha_2 \geq 0^*; \\ -(|\alpha_1|\ |\alpha_2|) & \text{ako} \quad \alpha_1 \geq 0^*,\ \alpha_2 < 0^*; \\ |\alpha_1|\ |\alpha_2| & \text{ako} \quad \alpha_1 < 0^*,\ \alpha_2 < 0^*. \end{cases}$$

Pokažimo da su operacije sabiranja i množenja zatvorene u skupu svih preseka:

Zadatak 2. Označimo sa γ skup $\alpha + \beta := \{a + b | \, a \in \alpha \wedge b \in \beta\}$. Pokazaćemo da su zadovoljene sve tri osobine preseka.

1) α i β su preseci, pa važi

$(\exists a \in \alpha)\ (\exists b \in \beta) \qquad x = a + b \in \gamma,$

što znači da skup γ nije prazan. Na osnovu

$(\exists c \notin \alpha)\ (\exists d \in \beta) \qquad u = c + d \notin \gamma,$

Sledi da se skup γ ne poklapa sa skupom $\mathbb{Q}$.

2) Neka za elemente $y \in \gamma$ i $x \in \mathbb{Q}$ važi $x < y$. Treba pokazati da $x \in \gamma$. Na osnovu

$(y \in \gamma) \Rightarrow (\exists a_1 \in \alpha)\ (\exists b_1 \in \beta) \qquad y = a_1 + b_1$ i

$(\exists d \in \mathbb{Q}) \qquad d := y - x$ i $d > 0,$

tako da možemo pisati

$x = (a_1 - d/2) + (b_1 - d/2)$, što znači da $x \in \gamma$ jer

$a_1 - d/2 < a_1$, pa $a_1 - d/2 \in \alpha$ i $b_1 - d/2 < b_1$, pa $b_1 - d/2 \in \beta$.

3) Skup γ nema najveći elemenat. Pretpostavimo suprotno, tj. da je x_0 najveći elemenat u γ. Znači

$(\exists a_0 \in \alpha)\ (\exists b_0 \in \beta) \qquad x_0 = a_0 + b_0$ i

$(\forall a \in \alpha)\ (\forall b \in \beta) \qquad x_0 \geq a + b.$

Preseci α i β nemaju najveći elemenat, pa postoji a' iz α, takvo da je $a' > a_0$ i postoji b' iz β takvo da je $b' > b_0$, dakle $a' + b' > a_0 + b_0 = x_0$, što znači da elemenat x_0 nije najveći u skupu γ.

Kako skup γ zadovoljava osobine 1), 2) i 3) definicije 3, on čini presek i on je, po definiciji, zbir preseka α i β

Zadatak 3. Pokazati da je 0^* neutralni elemenat u skupu preseka u $\mathbb{Q}$ u odnosu na operaciju sabiranja datu sa (5).

Rešenje: Označimo sa:

$\alpha_1 = \alpha + 0^* = \{a + y | \ a \in \alpha \ \wedge y < 0\}$.

Na osnovu prethodnog zadatka α_1 je presek u $\mathbb{Q}$. Treba pokazati da $\alpha_1 = \alpha$.

a) Ako $x \in \alpha_1$, tada iz

$(\exists a \in \alpha)\ (\exists y < 0)\ \ x = a + y$

Sledi da se može pisati $x = a + y < a + 0$, što znači da $x \in \alpha$, odnosno $\alpha_1 \subseteq \alpha \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha$.

b) Ako $a \in \alpha$, tada:

$(\exists a' \in \alpha)\ \ a' > a \Rightarrow a - a' < 0$, pa sledi da

$a - a' \in 0^*$.

Odavde je

$a = (a - a') + a' \Rightarrow a \in \alpha_1 \Rightarrow \alpha \subseteq \alpha_1 \Leftrightarrow \alpha \leq \alpha_1$.

prema a) i b) $\alpha = \alpha_1$.

Zadatak 4. Neutralni elemenat u skupu preseka u $\mathbb{Q}$ za množenje je presek

$1^* = \{ x |, x \in \mathbb{Q}, x < 1\}$. Pokazati.

Rešenje: Označimo sa $\alpha_1 := \alpha \cdot 1^*$, gde je $\alpha > 0^*$. Pokazaćemo da je $\alpha_1 = \alpha$.

a) Neka $x \in \alpha_1$. Ako je $x < 0$, tada sigurno $x \in \alpha$ (jer je $\alpha > 0^*$), a ako je $x > 0$, tada

$(\exists y \in \alpha)\ (y > 0)(\exists z \in 1^*)\ (z > 0) \qquad x = y \cdot z$ odakle sledi

$x = y \cdot z < y$ (jer je $z < 1$).

Prema tome, $x \in \alpha$ (jer $y \in \alpha$), odnosno $\alpha_1 \subset \alpha$.

b) Neka $x \in \alpha$ i $x > 0$; tada postoji $y \in \alpha$ takvo da je $y > x$ (α je presek, pa nema najveći elemenat) i važi $x = y \cdot z$, gde je $0 < z < 1$, što znači da $z \in 1^*$. Prema tome $x \in \alpha_1$, odnosno $\alpha \subset \alpha_1$. (Ako $x < 0$ tada $x \in \alpha_1$, po definiciji.)

Može se pokazati po definiciji i urađenim zadacima da važi:

Stav 4. Skup preseka u $\mathbb{Q}$ u odnosu na operacije sabiranja i množenja (datim sa (5) i (6)) i relacijom poretka čine uređeno polje.

Preseke sa navedenim osobinama zovemo ***realnim brojevima*** i označavamo sa $\mathbb{R}$. Racionalne preseke $\alpha = r^* = \{x| \ x < r\}$ ćemo zvati ***racionalnim brojevima***. To su preseci kod kojih skup $\mathbb{Q} \setminus \alpha$ ima najmanji elemenat. Ostale preseke nazivamo ***iracionalnim brojevima***.

Preslikavanje $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dato sa $q \to q^*$ je injekcija koja očuvava relaciju poretka i algebarsku strukturu.

Zadatak 5. Racionalan broj x, koji ne pripada preseku α iz $\mathbb{Q}$, $x \notin \alpha$, veći je od svakog racionalnog broja $y \in \alpha$.

Rešenje: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $x \leq y$ i da je $y \in \alpha$, dok $x \in \alpha$. Na osnovu osobine 2) preseka sledi da $x \in \alpha$, što je suprotno pretpostavci.

Zadatak 6. Pokazati da je skup preseka u skupu racionalnih brojeva u odnosu na relaciju $\leq$, datu sa (4), totalno uređen skup.

Rešenje: Neka su α_1 i α_2 proizvoljni preseci. Pokazaćemo da važi sledeće:

(9) $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ ili $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$.

Pretpostavimo suprotno, tj.

$\alpha_1 \nleq \alpha_2$ i $\alpha_2 \nsubseteq \alpha_1$. Dakle,

a) $\alpha_1 \nsubseteq \alpha_2$, tada

$(\exists x \in \alpha_2 \setminus \alpha_1) \Rightarrow (x \in \alpha_2) \land (x \notin \alpha_1) \Rightarrow (\forall \ a_1 \in \alpha_1)$, $x > a_1$, na osnovu prethodnog zadatka.

b) Ako važi i $\alpha_2 \nsubseteq \alpha_1$, tada

$(\exists y \in \alpha_1 \setminus \alpha_2) \Rightarrow (y \in \alpha_1) \land (y \notin \alpha_2) \Rightarrow (\forall a_2 \in \alpha_2)$, $y > a_2$.

Iz relacije a) sledi $x > y$ za dato $x \in \alpha_2$ i dato $y \in \alpha_1$, dok iz relacije b) sledi $y > x$ za dato $x \in \alpha_2$ i dato $y \in \alpha_1$, što je kontradikcija. Znači važi (8).

Zadatak 7. Ako je α presek, tada za $r \in \mathbb{Q}$ važi ekvivalencija

$r \in \alpha \Leftrightarrow r^* < \alpha$.

Pokazati.

Rešenje: Neka $r \in \alpha$ i $r^* = \{ x \mid x < r\}$, to $r \notin r^*$, pa je $r^* < \alpha$. Ako je $r^* < \alpha$ tada

$(\exists p \in \alpha)\ p \notin r^* \Rightarrow p \geq r \Rightarrow r \in \alpha$.

Sada smo u mogućnosti da pokažemo da je skup racionalnih preseka gust u skupu svih preseka.

Zadatak 8. Ako su α i β dva preseka i $\alpha < \beta$, pokazati da tada postoji racionalan broj (presek) r^* takav da je $\alpha < r^* < \beta$.

Rešenje: Kako je $\alpha < \beta$ to postoji elemenat $p \in \beta$ i $p \notin \alpha$. Takođe postoji elemenat $r \in \beta$ takav da je $r > p$ (β je presek, pa nema najveći elemenat.). Pokažimo da je r^* traženi racionalan presek. U stvari,

$(r \notin r^* \wedge r \in \beta) \Rightarrow r^* < \beta$.

Takođe, $p < r \Rightarrow p \in r^*$, međutim, $p \notin \alpha$ pa je $\alpha < r^*$.

Zadatak 9. Pokazati da za racionalne brojeve r, p i q važi:

a) $r < p \Leftrightarrow r^* < p^*$;

b) $p + r = s \Leftrightarrow p^* + r^* = s^*$;

c) $p \cdot r = s \Leftrightarrow p^* \cdot r^* = s^*$.

Rešenje:

a) $r < p \Rightarrow (r \in p^* \wedge r \notin r^*) \Rightarrow r^* < p^*$

$r^* < p^* \Rightarrow (\exists q \in p^* \setminus r^*) \Rightarrow r < q < p \Rightarrow r < p$.

b) Neka je $r + p = s$. Ako označimo sa $r^* + p^* = s_1^*$, tada

$a \in s_1^* \Rightarrow ((\exists x \in r^*)\ (\exists y \in p^*)\ a = x + y) \Rightarrow a = x + y < r + p = s \Rightarrow a \in s^* \Rightarrow s_1^* \leq s^*$.

Ako $a \in s^*$, tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $a = r + p - \varepsilon$, odnosno

$a = (r - \varepsilon /2) + (p - \varepsilon/2) \Rightarrow a \in r^* + p^* = s_1^*$, što znači da je $s^* \leq s_1^*$.

Znači $s_1^* = s^*$.

Neka je $r^* + p^* = s^*$. Pretpostavimo da je ili $r + p > s$ ili $r + p < s$. Na osnovu a) imamo

$r + p > s \Rightarrow (r + p)^* > s^*$, odnosno $r + p < s \Rightarrow (r + p)^* < s^*$,

što, s obzirom da je $(r + p)^* = r^* + p^*$, daje kontradikciju. Dakle, $p + r = s$.

c) Analogno kao b).

Zadatak 10. Ako su A i B dve klase realnih brojeva koje zadovoljavaju sledeće uslove

a. Svaki realan broj pripada jednoj i samo jednoj klasi;

b. Nijedna klasa nije prazna;

c. Svaki elemenat klase A manji je od svakog elementa klase B.

Tada postoji jedan i samo jedan realan broj γ takav da je za svako $\alpha \in A$, $\alpha \leq \gamma$ i za svako $\beta \in B$, važi $\gamma \leq \beta$. Pokazati.

Rešenje: Pokazaćemo prvo postojanje broja γ.

1) Ako klasa A ima najveći elemenat, tada je to broj γ.

2) Neka klasa A nema najveći elemenat. Formiraćemo skup

$G = \{ x \mid x \in \mathbb{Q}, x^* \in A\}$.

Pokažimo da je G presek.

a) Klasa A nije prazna, što znači da postoji realan broj $\alpha \in A$ i postoji realan broj $\alpha_1 > \alpha$ i $\alpha_1 \in A$. Na osnovu zadatka 7 postoji racionalan broj x_0*(presek) takav da je $\alpha < x_0^* < \alpha_1$. Prema definiciji skupa G važi da $x_0 \in G$. Klasa B nije prazna, što znači da postoji realan broj $\beta \in B$. Kako je β presek, to

$(\exists y_0 \in \mathbb{Q})\ y_0 \notin \beta \Rightarrow \beta < y_0^* \Rightarrow y_0^* \in B \Rightarrow y_0^* \notin A \Rightarrow y_0 \notin G$, pa je $G \neq \mathbb{Q}$.

b) Neka $x_1 \in G$ i neka je $x_2 < x_1$. Tada važe implikacije

$x_1^* \in A \Rightarrow x_2^* \in A \Rightarrow x_2 \in G$.

c) G nema najveći elemenat. Pretpostavimo suprotno, tj. da je x_3 najveći elemenat u G. Tada je x_3^* najveći elemenat u klasi A, što je suprotno pretpostavci da klasa A nema najveći elemenat.

(Zaista, ako pretpostavimo da postoji realan broj δ, $\delta > x_3^*$, tada postoji racionalan broj x_4^* takav da važi

$x_3^* < x_4^* < \delta \Rightarrow x_4^* \in A \Rightarrow x_4 \in G$.

Međutim, kako važi $x_4^* > x_3^* \Rightarrow x_4 > x_3$, to dobijamo da x_3 nije najveći elemenat u G).

Znači skup G je presek. Neka je, sada, γ realan broj definisan sa G.

Za svaki realan broj $\alpha \in A$ postoji realan broj $\alpha_1 \in A$ takav da je $\alpha_1 > \alpha$ i postoji racionalan broj x* takav da važi

$(\forall \alpha \in A)\ \alpha < x^* < \alpha_1 \Rightarrow x^* \in A \Rightarrow x \in G,\ x \notin \alpha \Rightarrow G > \alpha$, tj. $\alpha < \gamma$.

Svaki racionalan realan broj iz klase A manji je od svakog realnog broja iz klase B, pa je svako $\beta \in B$, $G \leq \beta$. Znači $\gamma \leq \beta$.

Pokažimo sada jedinstvenost realnog broja γ. Pretpostavimo da postoje dva realna broja γ_1 i γ_2 sa pomenutim osobinama i neka je $\gamma_1 < \gamma_2$. tada postoji realan broj r* takav da je $\gamma_1^* < r^* < \gamma^*$, što znači da $r^* \in B$ i $r^* \in A$. Ovo je kontradikcija, jer ne može r* pripadati obema klasama.

Na ovaj način smo pokazali da važe aksiome (R1) - (R15), odnosno, da su Dedekindovi preseci model koji zadovoljava aksiome realnih brojeva, pa, samim tim, svaki presek može da se poistoveti sa odgovarajućim realnim brojem.

Julijus Vilhelm Rihard Dedekind

Julijus Vilhelm Rihard Dedekind (6. oktobar 1831-12. februar 1916.) bio je nemački matematičar, jedan od glavnih osnivača moderne algebre.

Stekavši solidno matematičko obrazovanje na Tehničkoj visokoj školi u Braunšvajgu, 1850. godine, primljen je na univerzitet u Getingenu gde su mu učitelji bili Štern, teoretičar brojeva, Gaus i fizičar Veber. Dedekind će se docnije žaliti da je svoju matematičku kulturu u Getingenu nedovoljno koristio u praktičnom smislu, što ga je obavezivalo da se sam uputi u teoriju eliptičkih funkcija, modernu geometriju, višu algebru i matematičku fiziku. Svoju doktorsku disertaciju o Ojlerovim integralima branio je pred Gausom 1852. godine, a 1854. godine, imenovan je za docenta univerziteta. Četiri godine obavljao je sporedne funkcije: od 1855. do 1857. godine pratio je Dirihleova predavanja, koji je nasledio Gausa 1855. godine. Kasnije objavljuje raspravu o teoriji brojeva svog učitelja u čijem XI dodatku (1871. godine) izlaže ideje o algebarskim brojevima. Za profesora Politehnikuma u Cirihuimenovan je 1857. godine, a 1862. godine postaje profesor Tehničke visopke škole gde ostaje do smrti.

Inspirisan petom knjigom Euklidovih Elemenata, 1872. godine objavljuje kratku brošuru Neprekidnost i iracionalni brojevi, u kojoj najpre definiše preseke na skupu Q racionalnih brojeva. Presek je podela skupa Q na dva disjunktna podskupa, svaki broj drugog podskupa je veći od svakog broja prvog podskupa. Svaki element od Q definiše jedan presek, tj. dva podskupa od kojih je s jedne strane onaj od brojeva najviše jednak elementu, a sa druge strane onaj od brojeva koji su veći od elemenata. Suprotno ne važi. Izvesni preseci nisu definisani elementom iz Q. Dedekind takve preseke naziva iracionalnim brojevima. On pokazuje kako se može računati s takvim celinama, brišući na taj način antinomiju između aritmetike i geometrije. U drugoj brošuri Šta su i šta treba da budu brojevi? (1888), čije koncepcije potiču iz 1872-1878. godine, svodi pojam celog prirodnog broja na pojam konačnog skupa. Za njega je skup konačan ako ne može biti injektovan ni u jedan sopstveni deo.

Vezan prijateljstvom za Kantora, posredstvom značajne naučne korespodencije, pomaže mu da kostruiše teoriju skupova koju koristi u klasičnoj matematici. Tako u proučavanju algebarskih brojeva, zamenjuje kod Kumerovih idealnih brojeva, pojam ideala aditivnom podgrupom prstena, stabilnom za množenje. Ovo otkriće pokazaće se plodnim u svim matematičkim oblastima. Zato sam daje dokaz 1882. godine, primenjujući ga sa svojim učenikom Veberom u teoriji algebarskih krivi u ravni. Ova teorija koja se do tada javljala u geometriji i analizi, postaje poglavlje čiste algebre.

Dodatak-Predgovor prvom izdanju „Neprekidnost i iracionalni brojevi“

U nauci ne treba verovati bez dokaza u ono što se može dokazati. Ma kako taj zahtev izgledao ubedljiv, ipak, kako ja mislim, on se još uvek ne može nipošto smatrati zadovoljenim, ni kod zasnivanja najjednostavnije nauke, naime onog dela logike, koji obradjuje učenje o brojevima, pa čak i prema najnovijim izlaganjima.[*)]

Kada aritmetiku (algebru, analizu) nazivam samo jednim delom logike, time već iskazujem da pojam broja smatram sasvim nezavisnim od predstava ili intuicija prostora i vremena, da ga naprotiv smatram neposrednim rezultatom čistih zakona mišljenja. Moj glavni odgovor na pitanje postavljeno u naslovu ovog spisa glasi : brojevi su slobodne tvorevine čovekovog uma, oni služe kao sredstvo da jasnije i oštrije shvatimo raznolikost stvari. Tek čisto logičnom izgradnjom nauke o brojevima i u njoj dobivenim neprekidnim područjem brojeva, dovodimo sebe u stanje da tačno proučimo naše predstave o prostoru i vremenu, kada uspostavimo vezu između njih i područja brojeva, stvorenog u našem umu.[*)] Pratimo li tačno šta činimo kod brojanja skupa ili mnoštva stvari, bićemo dovedeni na posmatranje sposobnosti uma da stvari dovodi u vezu sa stvarima, da jednoj stvari dodeli jednu stvar, ili da jednu stvar predstavi jednom stvari, bez koje mogućnosti uopšte nikakvo mišljenje nije mogućno. Po mome shvatanju, kako sam to već takođe izjavio[*)] pri jednoj najavi ovog spisa, čitava nauka o brojevima mora se izgraditi na toj jedinoj, a inače neophodnoj osnovi. Već prilikom izdanja mog spisa o neprekidnosti, ja sam se odlučio ma takvo izlaganje, ali sam tek posle pojave istog i posle mnogih prekida, prouzrokovanih povećanim službenim poslovima i ostalim nužnim radovima, napisao prvu skicu na nekoliko listova, u godinama između 1872. i 1878., koju je tada videlo više matematičara i delimično sa mnom o tome razgovaralo. On ima isti naslov i, mada ne na najbolji način sređeno, sadrži ipak sve bitne osnovne misli ovog mog rada, koji daje samo njeno brižljivo izlaganje; kao takve glavne tačke pomenuću ovde oštro razlikovanje konačnog od beskonačnog, pojam broja stvari, dokaz da je način dokazivanja, poznat pod imenom matematičke indukcije (ili zaključivanja od n na $n+1$), zaista snažno dokazano sredstvo, i da je definicija indukcijom (ili rekurzijom) takođe određena i neprotivurečna.

Ovaj spis može shvatiti svako ko poseduje ono što se naziva zdravim čovekovim razumom; tome nisu ni najmanje potrebna filozofska ili matematička znanja iz škole. Ali vrlo dobro znam da će možda poneko jedva prepoznati njegove brojeve, koji su ga kroz ceo život pratili kao verni i pouzdani prijatelji, u senovitim oblicima koje mu predstavljam: on će se uplašiti dugim redom prostih zaključaka, koji odgovaraju osobenosti našeg razuma da deluje postepeno, on će se uplašiti trezvenog raščlanjivanja toka misli na kome počivaju zakoni brojeva, i postaće nestrpljiv što mora pratiti dokaze istina koje mu, prema njegovom tobožnjem unutrašnjem shvatanju, unapred izgledaju jasne i pouzdane.

[*)] Od meni poznatih spisa, pomenuću odlični „Udžbenik aritmetike i algebre“ od E. Schröder-a (Lajpcig, 1873.), u kome se takođe nalazi spisak literature, i, sem toga, rasprave od Kronecker-a i Helmholtz-a o pojmu broja i o brojanju i merenju (u kolekciji filozofskih članaka u čast E Zeller-a, Lajpcig 1887). Pojava tih rasprava je povod koji me je podstakao da sada i ja istupim sa mojim shvatanjem, u izvesnom pogledu sličnim, pa ipak u njegovom zasnivanju različitim, koje sam izgradio već pre mnogo godina i to bez uticaja sa bilo koje strane

[*)] Uporediti § 3 moje rasprave: Neprekidnost i iracionalni brojevi (Braunšvajg, 1872.)

[*)] Dirichlet-ova Predavanja iz teorije brojeva, teće izdanje, 1879, 163, primedba na str. 470

Naprotiv, baš u mogućnosti da se takve istine svode na druge, jednostavnije, pa ma koliko red zaključaka bio još uvek dug i prividno izveštačen, vidim ubedljiv dokaz da njihovo posedovanje, ili verovanje u njih, nikada nije dato neposredno unutrašnjom intuicijom, već se uvek stiče samo sa više ili manje potpunim opetovanjem pojedinačnih zaključaka. Tu misaonu delatnost, koju je zbog brzine njenog odvijanja teško pratiti, uporedio bih sa onom koju vrši pri čitanju jedan savršeno uvežbani čitalac; i to čitanje ostaje uvek više ili manje potpuno ponavljanje pojedinačnih koraka, koje početnik izvodi mučnim sricanjem; ali, za izvežbanog čitaoca dovoljan je vrlo mali deo istih, pa zato i vrlo mali rad ili napor uma, da sazna pravu, istinitu reč. Dakako samo sa vrlo velikom verovatnoćom; jer, kao što je poznato, i najuvežbanijemkorektoru se dešava s vremena na vreme da propusti neku štamparsku grešku, tj. da pogrešno čita, što bi bilo nemoguće kada bi potpuno ponovio misaoni lanac koji odgovara čitanju slova po slovo. Tako smo već i od našeg rođenja skloni da stalno i u sve jačoj meri uspostavljamo vezu između stvari i stvari, a time da uvežbavamo onu sposobnost uma na kojoj počiva i stvaranje brojeva; tim neprestanim mada nenamernim vežbanjem koje pada već u naše prve godine života, a sa tim povezanim izgrađivanjem sudova i toka zaključivanja, stičemo i riznicu pravih aritmetičkih istina, na koje se docnije naši prvi učitelji pozivaju kao na nešto jednostavno, samo po sebi razumljivo, u našem unutrašnjem poimanju dato, i tako se dešava da pogrešno kao jednostrani važe poneki, zapravo vrlo složeni pojmovi (kao, na primer, broj stvari).

U tom smislu, koji ću označiti rečima, prema jednoj poznatoj izreci, čovek uvek aritmetizira, neka listovi koji slede, kao pokušaj da se nauka o brojevima izgradi na jedinstvenoj osnovi, nađu blagonakloni prijem i neka podstaknu ostale matematičare, da duge nizove zaključaka svedu na skromniju, prijatniju meru.

Saobrazno cilju ovog spisa ograničiću se na posmatranje niza takozvanih prirodnih brojeva. Na koji način treba docnije izvršiti postepeno proširivanje pojma broja, stvaranje nule, negativnih, racionalnih, iracionalnih i kompleksnih brojeva, stalnim svođenjem na ranije pojmove, i to bez ikakvog unošenja tuđih predstava (kao na primer onih o merljivim veličinama), koje, po mome shvatanju, mogu biti izgrađene do potpune jasnoće tek pomoću nauke o brojevima, to sam pokazao bar na primeru iracionalnih brojeva, u mome ranijem radu o neprekidnosti (1872); na sasvim sličan način daju se lako obraditi ostala proširenja, kao što sam to na istom mestu već izjavio, i za sebe zadržavam nameru da tome predmetu posvetim jednu povezanu raspravu. Upravo sa takvim shvatanjem kao nešto samo po sebi razumljivo i baš ništa novo da se svaki stav algebre i više analize, ma koliko daleko u njima ležao, može iskazati kao neki stav o prirodnim brojevima, tvrđenje, koje sam takođe čuo iz usta Dirichlet-a. Međutim, nikako ne vidim nešto korisno-a to je i Dirichlet-u bilo sasvim daleko-u tome, da čovek stvarno preduzme takvo mučno opisivanje i da ne želi da koristi i prizna druge brojeve, izuzev prirodnih. Naprotiv, najveća i najplodnija dostignuća u matematici i ostalim znanostima ostvarena su prvenstveno stvaranjem i uvođenjem novih pojmova, na šta je primoralo učestalo navraćanje složenih pojmova, kojima se samo na mučan način moglo ovladati pomoću starih pojmova. O tome predmetu imao sam da održim jedno predavanje na Filozofskom fakultetu u leto 1854. godine prilikom moje habilitacije za privatnog docenta u Getingenu, čiji je sadržaj odobravao i Gaus; međutim, nije ovde mesto da u to podrobnije ulazim.

Koristim ovu priliku da, umesto toga, dam još nekoliko primedbi koje se odnose na moj raniji, gore pomenuti rad o neprekidnosti i iracionalnim brojevima. U njemu izložena, sjeseni 1858. pronađena, teorija iracionalnih brojeva zasniva se na onoj pojavi, koja se javlja u području racionalnih brojeva, koju sam označio imenom preseka i koju sam najpre istražio; i ona se završava dokazom neprekidnosti novog područja realnih brojeva .Čini mi se da je ona nešto jednostavnija, rekao bih mirnija, no što su to obe, od nje i međusobno različite teorije, koje su izložili K. Weierstrass i G. Cantor, a koja takođe poseduje potpunu strogost. Nju je docnije bez bitne promene U. Dini uzeo u Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reale (Piza, 1878); ali okolnost, da moje ime u toku tog izlaganja nije pomenuto kod opisa čisto aritmetičke pojave preseka, već slučajno upravo tamo gde se radi o egzistenciji merljive veličine koja preseku odgovara, lako bi mogla dovesti do pretpostavke da se moja teorija oslanja na posmatranje takvih veličina. Ništa netačnije ne bi moglo biti; naprotiv, u § 3 moga rada naveo sam različite razloge zbog čega potpuno odbacujem unošenje merljivih veličina, a što se tiče njihove egzistencije, na kraju sam naročito primetio, da za veliki deo nauke o prostoru, neprekidnost njegovih tvorevina uopšte nije neophodna pretpostavka, bez obzira na to što se ona, doduše, u delima o geometriji po imenu uzgred svakako pominje, ali nikada nije jasno definisana, pa, prema tome, ni za dokaze pristupačnom učinjena. Da to još podrobnije objasnim, napomenuću primerice sledeće. Izaberemo li po volji tri tačke *A, B, C* koje ne leže na jednoj pravoj, sa jednim ograničenjem da odnosi njihovih rastojanja *AB, AC, BC* budu algebarski[*)] brojevi, i smatramo li prisutnim u prostoru samo one tačke *M*, za koje su odnosi *AM, BM, CM* prema *AB* takođe algebarski brojevi, to je, kao što je lako videti, prostor koji se sastoji iz svih tih tačaka *M*, svuda prekidan; ali uprkos prekidnosti, šupljikavosti tog prostora, i njemu su, koliko ja vidim, takođe tačno izvodljive sve konstrukcije, koje se javljaju u euklidovim Elementima, kao i u potpuno neprekidnom prostoru; zato se u Euklidovoj nauci prekidnost toga prostora ne bi primetila, ni osetila. Međutim, kada mi neko kaže da prostor drugačije ne bismo mogli ni zamisliti do neprekidnim, posumnjao bih u to i skrenuo bih pažnju na to koliko je daleko razvijena, utančana naučna izgradnja potrebna, da se samo jasnije spozna suština neprekidnosti, i da se shvati da se sem racionalnih veličinskih odnosa, mogu zamisliti takođe iracionalni, sem algebarskih takođe transcendenti. Utoliko mi se čini lepšim da se čovek može izvinuti do stvaranja čistog, neprekidnog područja brojeva bez ikakve predstave o merljivim veličinama, i to konačnim sistemom jednostavnih misaonih koraka; i, po mome shvatanju, tek to pomoćno sredstvo omogućuje mu da jasno izgradi predstavu o neprekidnom prostoru.

Ista, na pojavi preseka zasnovana teorija iracionalnih brojeva, nalazi se takođe izloženau Introducion à la théorie des fonctions d' une variable, od J. Tannery-a (Pariz, 1886). Ako ispravno shvatam jedno mesto iz predgovora toga dela, autor je tu teoriju pronašao nezavisno, dakle u vreme, kad mu je bio još nepoznat ne samo moj spis, nego ni delo Fondamenti od Dini-a; to slaganje mi se čini prijatnim dokazom za to da je moje shvatanje prirode stvari ispravno, što su priznali i drugi matematičari, na primer M. Pasch u njegovom Uvodu u diferencijalni i integralni račun (Lajpcig 1883). Naprotiv, ne mogu se bez daljeg složiti sa Tannery-em kada on tu teoriju naziva razvijanjem jedne misli koja potiče od J. Bertrand-a, koja je sadržana u njegovom delu Traité d' arithmétique i sastoji se u tome da se iracionalan broj definiše naznačivanjem svih racionalnih brojeva koji su manji im svih onih koji su veći od broja koji treba definisati. Na tu izjavu, koju je ponovio O. Stolz-kako izgleda, bez bližeg proveravanja- u predgovoru drugog dela njegovih

[*)] Dirichlet-ova Predavanja o teoriji brojeva § 159. drugog § 160. trećeg izdanja.

Predavanja o opštoj aritmetici (Lajpcig, 1886), dozvoljavam sebi da primetim sledeće. Da jedan iracionalan broj zaista treba smatrati potpuno određenim upravo opisanim naznačivanjem, to je uverenje bez sumnje i pre Bertrand-a oduvek bilo zajedničko dobro svih matematičara, koji su se zanimali pojmom iracionalnog; svakom onom ko približno izračunava iracionalni koren neke jednačine, lebdi pred očima baš taj način njegovog određivanja; i ako se iracionalan broj shvata kao odnos merljivih veličina, kako to Bertrand isključivo čini u njegovom delu (predamnom je osmo izdanje iz 1885. godine), onda je taj način njegovog određivanja najjasnije iskazan već u čuvenoj definiciji koju je Euklid (Elementi, V, 5) postavio za jednakost odnosa. Baš to prastaro ubeđenje zacelo je bilo izvor moje teorije, kao i one Bertrand-ove-i ponekih drugih, manje ili više uspelih pokušaja, da se na čvrstu osnovu postavi uvođenje iracionalnih brojeva u aritmetiku. Međutim, ako će se čovek sa Tannery-em dotle potpuno saglasiti, ipak se pri jednom istinskom ispitivanju odmah mora primetiti da Bertrand-ovo izlaganje, u kome se pojava preseka u svojoj logičnoj čistoti ne pominje ni jedan jedini put, sa mojim baš nikakve sličnosti nema, ukoliko se u njemu odmah pribegava egzistenciji merljivih veličina, što sasvim odbacujem iz gore opisanih razloga; i nezavisno od te okolnosti, čini mi se da to izlaganje i u docnijim, na pretpostavci te egzistencije zasnovanim definicijama i dokazima, sadrži još nekoliko tako bitnih nedostataka, da ja smatram opravdanim tvrđenje, iskazano u mom spisu ,da stav $\sqrt{2}\ \ \sqrt{3} = \sqrt{6}$ još nigde nije strogo dokazan, pa ni u ovom, u ponekom drugom pogledu, odličnog dela.

Harcburg, 5. oktobar 1887. R. Dedekind

Zaključak

Cilj ovog seminarskog rada je bio da se na što bolji način objasni suština Dedekindovog preseka. Rad se sastoji iz dve glave, dve podglave. Uz pomoć literature, preko nekoliko definicija i rešenih zadataka, uspeli smo da objasnimo Dedekindov presek.

Literatura

- DEDEKIND, Richard: Neprekidnost i iracionalni brojevi, Beograd: Matematički institut, 1976

- TAKAČI, Đurđica, Arpad: Zbirka zadataka iz Analize I, Prvi deo. Granična vrednost. Neprekidnost. Izvod.- Novi Sad: Institut za matematiku, 1989

- GAJIĆ, Ljiljana: Predavanja iz Uvoda u analizu, Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, 2004

- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dedekind.html