UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
NOVI SAD

PISMENA PRIPREMA ČASA
ZA POLAGANJE STRUČNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

Kandidat: Valerija Samardžija
Iz Poljoprivredne škole sa domom učenika u Futogu

Naziv škole: Gimnazija Jovan Jovanović Zmaj
Datum i vreme realizacije časa: 30. IV 2004. u 11 sati
Razred, odeljenje: III-3
Smer: prirodno-matematički
Nastavna tema: Granična vrednost niza
Nastavna jedinica: Broj e - uvodni čas

Didaktičko-metodička zasnovanost nastave
Oblik rada: frontalni
Nastavna metoda: kombinovana, monološka i dijaloška
Nastavna sredstva: tabla i kreda
Literatura za profesora: J. D. Kečkić: Matematika za III razred,
Lj. Gajić, D. Herceg, N. Krejić: Elementi poslovne matematike,
R. Courant, H. Robbins: ta je matematika?
Literatura za učenike: Jovan D.Kečkić: Matematika za III razred

Cilj časa
Upoznavanje sa Ojlerovim brojem i ovladavanje principom definisanja broja kao granične vrednosti monotonog i ograničenog niza

Zadaci nastavnog časa
a) materijalni
ponavljanje teoreme o monotonom ograničenom nizu,
primena teoreme, to jest provera monotonosti i ograničenosti niza pomoću kojeg potom definišemo Ojlerov broj e,
primer iz života - kontinuirano kamaćenje,
primena broja e na izračunavanje nekih graničnih vrednosti,
b) funkcionalni
razvijanje logičkog i analitičkog načina mišljenja
c) vaspitni
razvijanje koncentracije i formiranje radnih navika

BROJ e

Uvodni deo časa

Mi ćemo danas definisati jedan nov realan broj. To ćemo uraditi uz pomoć pojma granične vrednosti niza. Naime, granična vrednost niza se često koristi za definisanje nekih brojeva.

Ponovimo teoremu o monotonom i ograničenom nizu.

Podsetimo se i Bernulijeve nejednakosti:

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad h>-1, \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Matematičkom indukcijom nije teško pokazati da, ako je $h \neq 0$, a $n \in \mathbf{N}$ važi: $(1+h)^{n+1} > 1+(n+1)h$.

Glavni deo časa

Neka je niz (x_n) definisan sa

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pokažimo da je niz (x_n) rastući. Ako u Bernulijevoj nejednakosti stavimo $h = -\frac{1}{(n+1)^2}$ dobijamo

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1},$$

pa je

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 1-\frac{1}{n+1}.$$

Odavde je

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

odnosno $x_{n+1} > x_n$, $n \in \mathbf{N}$. Time smo pokazali da je posmatrani niz rastući.

Da bismo pokazali da je niz (x_n) ograničen sa gornje strane, koristićemo pomoćni niz (y_n) definisan na sledeći način

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \quad n > 1, \quad y_1 = 5.$$

Pokažimo da je on opadajući niz. Koristeći Bernulijevu nejednakost za $h = \frac{1}{n^2-1}$ za $n > 1$ dobijamo

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

jer iz $n^2 > n^2 - 1$ sledi $\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}$ to jest $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}$.

Dakle,

$$\left(\frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

odakle je

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

odnosno

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Time smo pokazali da je $y_n > y_{n+1}$, za $n > 1$ i važi $y_1 = 5 > y_2 = 4$ to jest on je opadajući.

Sa druge strane važi

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = y_n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dakle,

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < y_n < \ldots < y_2 < y_1 = 5.$$

Prema tome,

za proizvoljno $n \in \mathbf{N}$, $x_n < 5$.

Zaključak:

Niz (x_n) je monotono rastući niz ograničen sa gornje strane, odakle sledi da je on konvergentan, odnosno postoji granična vrednost tog niza $\lim_{n\to\infty} x_n$. Ta granična vrednost je, po definiciji, Ojlerov broj e. Dakle

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Znači, oznaku e i ime je dobio po Ojleru[1]. Broj e je iracionalan i transcendentan broj[2] čija je približna vrednost 2,718281828459045.

Broj e se u literaturi definiše i kao granična vrednost sledećeg niza

$$\tilde{x}_n = 1 + + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Može se pokazati da je ovaj niz monotono rastući i ograničen. Posebno se pokazuje da niz $(\tilde{x}_n)$ i niz (x_n) imaju istu graničnu vrednost. U praksi se niz $(\tilde{x}_n)$ koristi za numeričko izračunavanje broja e.

Primeri primene

a) Broj e ima prirodnu ulogu u kamatnom računu. Ako uložimo D dinara, nakon godinu dana, uz kamatnu stopu od p procenata i kontinuirano kapitalisanje, na našem računu će biti De^p dinara.

b) Pomoću broja e se mogu izraziti neke granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2004}{n}\right)^n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Završni deo časa

Ponavljanje nastavne jedinice postavljanjem sledećih pitanja:

1. Kako smo definisali broj e?
2. Kako znamo da postoji granična vrednost niza $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$?
3. Pokušajte izračunati $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{2004}{n}\right)^n$.

[1] L. Euler (1707–1783)

[2] Transcendentnost broja e je dokazao Ermit (C. Hermite) 1873. godine