UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO- MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

O SVOJSTVU KOMPAKTNOSTI

- SEMINARSKI RAD A M271-

Mentor:
dr Nenad Teofanov

Student:
Leona Oros

Novi Sad, 2009. godina

Sadržaj

Uvod

Osnovna tema ovog rada je proučavanje pojma kompaktnosti. Kompaktnost je topološko svojstvo koje omogućava mnoge konstrukcije u matematičkoj analizi i u drugim oblastima matematike. Na primer često se koristi činjenica da je neprekidna realna funkcija ograničena i uniformno neprekidna nad kompaktnim skupom, kao i da na kompaktnom skupu dostiže minimum i maksimum.

U radu smo se najpre podsetili osnovnih topoloških pojmova. Radi jednostavnosti, pojam kompaktnosti smo najpre proučili na primeru realne prave. Zatim smo naveli definiciju kompaktnih topoloških prostora i skupova, kao i svojstva preslikavanja kompaktnih skupova.

1. TOPOLOŠKI PROSTOR

Posmatrajmo realnu pravu kao topološki prostor. Najvažniji topološki pojam je pojam okoline. Pored tog pojma navešćemo još neke poznate pojmove potrebne za dalji rad.

Definicija 1.1 $Okolina$ tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ je svaki podskup skupa $\mathbb{R}$ koji sadrži otvoren interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ za neko $\varepsilon > 0$.

Definicija 1.2 Skup $A \in \mathbb{R}$ je $otvoren$ ako je okolina svake svoje tačke ili ako je prazan. Skup $B \in \mathbb{R}$ je $zatvoren$ ako je skup $A = \mathbb{R} \setminus B$ otvoren.

Definicija 1.3

a) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je $unutrašnja\ tačka$ skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako je A okolina tačke a. Skup unutrašnjih tačaka skupa A naziva se $unutrašnjost$ skupa A i označava se sa A°.

b) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je $adherentna\ tačka$ skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka iz A. Skup adherentnih tačaka skupa A naziva se $adherencija$ ili $zatvaranje$ skupa A i označavamo sa $\overline{A}$.

c) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je $tačka\ nagomilavanja$ skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedna tačka $b \in \mathbb{R}, b \neq a$. Skup tačaka nagomilavanja skupa A označava se sa A'.

d) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je $izolovana\ tačka$ skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako postoji bar jedna okolina tačke a koja osim tačke a ne sadrži ni jednu drugu tačku skupa A.

e) Tačka $a \in \mathbb{R}$ je $rubna\ tačka$ skupa A ako u svakoj okolini tačke postoji bar jedna tačka iz A i bar jedna tačka iz komplementa skupa A. Skup rubnih tačaka naziva se rub.

Definicija 1.4 Skup A je $svuda\ gust$ u skupu B, ako je bilo koja tačka iz B adherentna tačka od A, to jest ako je $B \subset \overline{A}$.

Na osnovu navedenih definicija mogu se dokazati sledeća svojstva skupa realnih brojeva kao topološkog prostora.

1) Neka je tačka a tačka nagomilavanja skupa $A \subset \mathbb{R}$. Tada u svakoj okolini tačke a postoji beskonačno mnogo elemenata skupa A.
2) Svaka tačka nagomilavanja skupa $A \subset \mathbb{R}$ je i adherentna tačka skupa $A \subset \mathbb{R}$. Obrnuto ne mora da važi.
3) Za svake dve tačke $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \neq y$ postoje disjunktne okoline tačaka x i y.
4) Skup $A \subset \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.

Neka je $\mathcal{O}$ kolekcija otvorenih skupova u $\mathbb{R}$. Tada je $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ topološki prostor u smislu sledeće definicije.

Definicija 1.5 Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova skupa X je kolekcija otvorenih skupova ako i samo ako važe sledeća tri uslova:
1) Prazan skup i skup X su otvoreni, to jest $\emptyset, X \in \mathcal{O}$;
2) Presek svaka dva otvorena skupa je otvoren skup, to jest za svako $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ važi $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$;
3) Unija proizvoljno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup, to jest za svaku kolekciju $\{O_i : i \in I\} \subset O$ važi $\cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

Za kolekciju $\mathcal{O}$ kažemo da je topologija na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je topološki prostor.

Ovako uvedena topologija u $\mathbb{R}$ zove se uobičajena topologija na $\mathbb{R}$ i označava se sa $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Razlikujemo **antidiskretnu** (najgrublju) i **diskretnu** (najfiniju) topologiju. Antidiskretna topologija je $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, dok je diskretna topologija $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$, gde je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X, to jest svi otvoreni podskupovi skupa X su otvoreni skupovi.

Ako je (X, d) metrički prostor u njemu se topologija, kao i svi pojmovi uvedeni u $\mathbb{R}$, definiše preko otvorenih lopti.

Definicija 1.6 Metrički prostor je uređen par (X, d), gde je X neprazan skup, a $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ je funkcionela za koju važi:

1.$d(x, y) \geq 0$, za sve $x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo je $x = y$,
3.$d(x, y) = d(y, x)$, za sve $x, y \in X$,
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, za sve $x, y, z \in X$.

Definicija 1.7 Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $\mathcal{O} \subset X$ je otvoren skup ako za svaki element $x_0 \in \mathcal{O}$ postoji $r > 0$ tako da je $L_r(x_0) \subset \mathcal{O}$, gde je $L_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$. Zatvoren skup je, po definiciji, komplement otvorenog skupa.

Komentar:

- Prostor $(X, \|.\|)$ je normiran ako preslikavanje $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ ispunjava sledeće uslove:
  1. $\|x\| \geq 0$ i $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,
  2.$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za sve $x, y \in X$,
  3.$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i svako $x \in X$.
- U normiranom prostoru $(X, \|.\|)$ (otvorena) lopta sa centrom u $x_0 \in X$, poluprečnikom $r > 0$ se definiše sa $L_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$.
- U definiciji 1.5 dimenzija prostora ne igra nikakvu ulogu, pa je tako i $\mathbb{R}^n$ topološki prostor ako se otvoreni skupovi definišu preko okolina, pri tome, okolina tačke (vektora) $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ je svaki skup koji sadrži otvorenu loptu $L_r(x_0)$ za neko $r > 0$.

Bogata struktura metričkog prostora zasnovana je isključivo na pojmu rastojanja. Međutim, detaljnija analiza složenih metričkih pojmova i stavova koji na njima počivaju, pokazuje da mnogi od njih ne koriste eksplicitno rastojanje već formalno počivaju na pojmu otvorenog skupa i osobinama kolekcije otvorenih skupova.

Gotovo svi topološki prostori koji se proučavaju u klasičnoj matematičkoj analizi (prostori brojeva, nizova, neprekidnih funkcija i slično), mogu da se posmatraju kao prostori u kojima je topološka struktura određena nekom metrikom. Iz ovog razloga, u daljem tekstu otvoreni skup je dat definicijom 1.7.

2. KOMPAKTNOST U SKUPU REALNIH BROJEVA

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa pojmom realne prave i njenim osnovnim svojstvima, kao što je na primer Kantorov princip.

Podsetimo se, niz realnih brojeva je funkcija $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Definicija 2.1 Neka je $n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, tj. neka je

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k < \ldots$$

i neka je $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ brojni niz. Niz $a \circ n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sa članovima $a_{n_k}, k = 1, 2, \ldots$, je $podniz$ niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Označava se sa $\{a_{n_k}\}$ i piše $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definicija 2.2 Elemenat $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je $tačka\ nagomilavanja$ niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako postoji podniz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji teži ka a, tj. takav da je $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Teorema 2.1 Elemenat $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ako i samo ako u svakoj okolini elementa a ima beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka je O proizvoljna okolina od a. Pošto je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ postoji podniz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, što znači da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je za sve $k \geq k_0, a_{n_k}\in O$, a to je beskonačno mnogo njih.

($\Leftarrow$) Sada pretpostavljamo da u svakoj okolini od a ima beskonačno mnogo članova niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Neka $a \in \mathbb{R}$. Iz okoline $(a-1, a+1)$ izaberimo proizvoljan član niza a_{n_1}. U okolini $(a-1/2, a+1/2)$ ima beskonačno mnogo članova niza, pa možemo izabrati $a_{n_2} \in (a-1/2, a+1/2)$ tako da je $n_2 > n_1$ i tako dalje, iz svake okoline $(a-1/k, a+1/k), k \in \mathbb{N}$, biramo a_{n_k} tako da je $n_k > n_{k-1}$. Na taj način dobijamo podniz $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subseteq\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka a, što dokazuje da je a tačka nagomilavanja niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Neka ja a jedan og fiktivnih elemenata, recimo $+\infty$. Za svako $k \in \mathbb{N}$, počevši od 1 pa redom na dalje, postoji član niza a_{n_k}, $a_{n_k} > k$ i $n_k > n_{k-1}$. Po konstrukciji ovaj podniz niza $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergira ka $+\infty$, što je i trebalo dokazati. ■

Teorema 2.2 (Bolcano- Vajerštrasova teorema za nizove) Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$, to jest svaki ograničen niz ima bar jedan konvergentan podniz.

Radi jednostavnijeg izlaganja navodimo najpre teoremu o karakterizaciji kompaktnih skupova u $\mathbb{R}$. Pojam pokrivača i potpokrivača dat je u sledećoj glavi (definicija 3.1).

Teorema 2.3 Neka je $A \subset \mathbb{R}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1. A je zatvoren i ograničen.
2. Svaki beskonačan podskup skupa A ima tačku nagomilavanja i ona pripada skupu A (Bolcano- Vajerštrasova osobina).
3. Svaki otvoren pokrivač skupa A sadrži konačan potpokrivač (Hajne-Borelova osobina).
4. Svaki niz elemenata skupa A sadrži konvergentan podniz i granica tog podniza je elemenat skupa A.
5. Svaka familija zatvorenih podskupova skupa A koja ima osobinu konačnog preseka (familija skupova ima osobinu konačnog preseka ako svaka njena konačna podfamilija ima neprazan presek) ima neprazan presek (barem jednu zajedničku tačku).

Skup A koji ima neku od gore navedenih osobina zove se $kompaktan$ skup.

Dokaz teoreme 2.3.

Svojstvo 3. je u stvari definicija kompaktnog skupa u $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ u smislu definicije 3.2.

1. $\Leftrightarrow$ 2.

$(\Rightarrow)$ Neka je skup A ograničen i zatvoren. Ako je skup A konačan, tada nema šta da se dokazuje. Ako je skup A beskonačan skup, neka je tada skup S beskonačan podskup od A. Skup S je ograničen, prema Bolcano-Vajerštrasovoj teoremi skup S ima bar jednu tačku nagomilavanja α. Pošto je S podskup od A, to je $\alpha \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja i za skup A, pa prema stavu ***4)*** (str. 3), $\alpha \in A$, što je i trebalo dokazati.

$(\Leftarrow)$ Neka svaki beskonačan podskup S skupa A ima tačku nagomilavanja koja pripada A. Pokazaćemo prvo da je skup A zatvoren, što je prema ***4)*** (str. 3) ekvivalentno sa iskazom da skup A sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Neka je β jedna tačka nagomilavanja skupa A. To znači, za proizvoljno $\varepsilon_1 > 0$, da u skupu $(\beta - \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_1) \cap A$ postoji bar jedna tačka $a_1 \neq \beta$ i neka je $d_1 = |\beta - a_1|$. U skupu $(\beta - d_1/2, \beta + d_1/2) \cap A$ postoji tačka $a_2 \neq \beta$. Nastavljajući postupak, dobijamo beskonačan skup $S = \{a_1, a_2, ...\}$, koji je podskup od A. Prema konstrukciji β je tačka nagomilavaja skupa S, pa po pretpostavci pripada skupu A. Na isti način se pokazuje i da sve ostale tačke nagomilavanja skupa A pripadaju skupu A. Znači, skup A je zatvoren.

Ostalo je još da se pokaže da je skup A ograničen skup. Pretpostavimo suprotno, to jest da A nije ograničen skup. Konstruisaćemo beskonačan skup $S \subset A$, koji nema tačku nagomilavaja u skupu A. Uzmimo proizvoljan elemenat $a_1 \in A$ i neka za prirodan broj n_1 važi $|a_1| < n_1$. Pošto A nije ograničen, postoji $a_2 \in A$ sa osobinom $|a_2| > n_1$, i neka je $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da važi $|a_2| < n_2$... Na ovaj način dobijamo beskonačan skup prirodnih brojeva $\{n_1, n_2, ...\}$ i beskonačan skup S elemenata iz A, $S = \{a_1, a_2, ...\}$, tako da važi

$$|a_1| < n_1 < |a_2| < n_2 < |a_3| < n_3 < \dots .$$

Skup S očigledno nema tačaka nagomilavanja u $\mathbb{R}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da svaki beskonačan podskup od A ima tačku nagomilavaja.

3. $\Leftrightarrow$ 1.

$(\Leftarrow)$ Neka je A ograničen i zatvoren skup i pretpostavimo da skup A nema Hajne- Borelovu osobinu, što znači da postoji otvoreno pokrivanje $\{O_i : i \in I\}$ iz koga se ne može izdvojiti konačno pokrivanje. Postoji interval $[a_1, b_1]$, takav da $A \subset [a_1, b_1]$ (zbog ograničenosti). Podelimo interval $[a_1, b_1]$ pomoću njegove sredine na dva jednaka dela i obeležimo sa $[a_2, b_2]$ onu polovinu intervala $[a_1, b_1]$ za koju se ne može izdvojiti konačno pokrivanje skupa $[a_1, b_1] \cap A$. Nastavljajući postupak, dobijamo niz intervala $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$,... sa osobinom da je svaki sledeći sadržan u prethodnom i njihove dužine teže nuli, tako da, na osnovu Kantorovog principa, postoji jedan i samo jedan realan broj α koji pripada svim intervalima. Pokazaćemo da je α tačka nagomilavanja skupa A, to jest da u svakoj okolini tačke α postoji beskonačno mnogo elemata skupa A. Ako je $U(\alpha)$ proizvoljna okolina tačke α, tada prema definiciji okoline postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U(\alpha)$. Sa druge strane, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom $[a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, jer dužine intervala $[a_n, b_n]$ teže nuli, a svaki sadrži tačku α i po konstrukciji beskonačno mnogo elemenata skupa A. To povlači da i u okolini $U(\alpha)$ ima beskonačno mnogo elemenata skupa A, pa je α tačka nagomilavanja skupa A. Pošto je skup A zatvoren, tačka α mu pripada.

Kako je $\{O_i : i \in I\}$ pokrivanje skupa A, to postoji $i_1 \in I$ takvo da $\alpha \in O_i$, kao i n_1 da za svako $n > n_1$ je $[a_n, b_n] \subset O_{i_1}$. Time smo sve intervale $[a_n, b_n]$, za $n > n_1$ pokrili sa jednim otvorenim skupom familije $\{O_i : i \in I\}$. Ovo je u kontradikciji sa konstrukcijom intervala $[a_n, b_n]$,

$n \in \mathbb{N}$, koje smo birali tako da skupovi $[a_n, b_n] \cap A$ nemaju Hajne- Borelovu osobinu.

($\Rightarrow$) Neka skup A ima Hajne- Borelovu osobinu. Treba da pokažemo da je skup A zatvoren i ograničen. Pretpostavimo suprotno, to jest da skup A nije zatvoren i ograničen. Prema svojstvu ***4)*** (str. 3) to znači da postoji beskonačan skup S koji nema tačku nagomilavanja u skpu A. Konstruisaćemo sada otvoreno pokrivanje za skup A iz koga neće moći da se izdvoji knačno pokrivanje. Za tačku $x \in A \setminus S$ postoji otvoreni skup O_x takav da je $O_x \cap S = \emptyset$ (takva okolina postoji, jer ni jedna tačka iz A nije tačka nagomilavanja skupa S). Za $y \in S$ postoji otvoren skup O_y sa osobinom da je $O_y \cap S = y$. Očigledno je $A \subset (\bigcup_{x \in A \setminus S} O_x) \bigcup (\bigcup_{y \in S} O_y)$. Međutim, pošto je skup S beskonačan, iz familije pokrivača $\{O_x, x \in A \setminus S\} \bigcup \{O_y, y \in S\}$ skupa A se ne može izdvojiti konačno pokrivanje, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da skup A ima Hajne- Borelovu osobinu.

Pokazali smo da je 1. ⇔ 2. ⇔ 3.

1. ⇔ 4.

($\Rightarrow$) Neka je $\{a_n\}$ niz u A. Pošto je A ograničen sledi da je i niz $\{a_n\}$ ograničen. Sada dokazujemo da $\{a_n\}$ ima konvergentan podniz.

Ako je skup $S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ konačan, tada postoji elemenat a tog skupa takav da je $a_n = a$ za beskonačno mnogo vrednosti $n_1, n_2, ...$ iz $\mathbb{N}$. Tada podniz $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ teži ka a.

Ako je skup S beskonačan, na osnovu 2. ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbb{R}$, recimo a. Niz elemenata ovog skupa koji je podniz niza $\{a_n\}$ i konvergira ka a možemo konstruisati kao i u dokazu Teoreme 2.1. Granica tog podniza je tačka nagomilavanja skupa A, a skup A je zatvoren. Dalje, znamo da je skup $A \subset \mathbb{R}$ zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Sledi da $a \in A$.

($\Leftarrow$) Razlikujemo dva slučaja:

1° A je konačan ⇒ 1., jer je svaki konačan skup zatvoren i ograničen.

2° A je beskonačan. Posmatrajmo proizvoljan niz $\{a_n\}$ u A i skup $S = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ako je $S \subset A$ beskonačan, onda ima tačku nagomilavanja koja pripada skupu A, jer je limes podniza tačka nagomilavanja skupa vrednosti niza, što je u ovom slučaju skup S, a to je 2. Kako smo već pokazali da iz 2.⇒1., dobijemo da iz 4. ⇒1., što je trebalo pokazati.

3. $\Leftrightarrow$ 5.

$(\Rightarrow)$ Neka svaki otvoren pokrivač skupa A sadrži konačan potpokrivač i neka kolekcija zatvorenih skupova $\{F_i : i \in I\}$ ima svojstvo konačnog preseka. Pretpostavimo da je $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Tada je $\bigcup_{i\in I} A \setminus F_i = A$, pa kako su skupovi $A \setminus F_i$ otvoreni, postoji konačan podskup $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I$ da je $A = \bigcup_{j=1}^{k} A \setminus F_{ij}$. Prelaskom na komplement dobijamo $\bigcap_{j=1}^{k} F_{ij} = \emptyset$ što je nemoguće, jer posmatrana kolekcija ima svojstvo konačnog preseka. Dakle, važi $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Neka važi dati uslov i neka je $A = \bigcup_{i\in I} O_i$, gde su skupovi $O_i, i \in I$, otvoreni. Tada je $\bigcap_{i\in I} A \setminus O_i = \emptyset$, pa kako su skupovi $A \setminus O_i$ zatvoreni, ova kolekcija nema svojstvo konačnog preseka. Zato postoji konačan skup $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I$, takav da je $\bigcap_{j=1}^{k} A \setminus O_{ij} = \emptyset$, to jest $\bigcup_{j=1}^{k} O_{ij} = A$. Dakle, $\{O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_k}\}$ je konačan potpokrivač pokrivača $\{O_i : i \in I\}$. ■

Kao jednostavnu primenu prethodne teoreme navodimo sledeći primer.

Primer 2.1 Zatvoreni intervali su kompaktni skupovi u prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$.

Pretpostavimo da interval $[a, b]$, gde je $a < b$, nije kompaktan skup. Tada, prema prethodnoj teoremi, postoje otvoreni skupovi $O_i \in \mathcal{O}_{uob}, i \in I$ da je $[a, b] \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ i takvi da interval $[a, b]$ ne može da se pokrije sa konačno mnogo ovih skupova. Tada ovo važi i za bar jedan od intervala $[a, c], [c, b]$, gde je $c = \frac{a+b}{2}$ sredina duži $[a, b]$. Označimo ovaj interval sa $[a_1, b_1]$, ponovo ga podelimo na pola i po istom kriterijumu odaberimo interval $[a_2, b_2]$. Daljim polovljenjem dobijamo niz intervala $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3]$... i pri tom važi $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Tada, prema Kantorovoj teoremi za skupove, postoji broj $\gamma \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Pošto je $\gamma \in [a, b]$, postoji $i_0 \in I$ da je $\gamma \in O_{i0}$. Kako je $O_{i0} \in \mathcal{O}_{uob}$, postoji $r > 0$ da je $(\gamma - r, \gamma + r) \subset O_{i0}$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $b_n - a_n < r$. Tada je $b_n < a_n + r < \gamma + r$ i $a_n > b_n - r > \gamma - r$, pa je $[a_n, b_n] \subset (\gamma - r, \gamma + r) \subset O_{i0}$. Ovo je netačno zbog načina izbora intervala $[a_n, b_n]$. □

3. KOMPAKTNOST U TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

Definicija 3.1 Familija skupova $\{A_i : i \in I\}$ je *pokrivač* skupa A ako za svako $x \in A$ postoji $i \in I$ takvo da $x \in A_i$. Ako su pri tome skupovi A_i otvoreni, tada se familija $\{A_i : i \in I\}$ naziva *otvoreni pokrivač* skupa A. Za podfamiliju koja i sama predstavlja pokrivač kažemo da je *potpokrivač* datog pokrivača.

Definicija 3.2 Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *kompaktan* ako i samo ako svaki otvoren pokrivač skupa X sadrži konačan potpokrivač.

Na primer, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$ nije kompaktan, jer $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ ne sadrži konačan potpokrivač.

Za dat topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ i $A \subset X$, uređeni par $(A, \mathcal{O}_A)$, gde je $\mathcal{O}_A$ kolekcija skupova dobijena presekom otvorenih skupova iz $\mathcal{O}$ i skupa A jeste topološki prostor, snabdeven topologijom koju u A indukuje topologija iz X. Kažemo da je $(A, \mathcal{O}_A)$ topološki potprostor prostora $(X, \mathcal{O})$. Sada možemo definisati kompaktan skup.

Definicija 3.3 Skup A je *kompaktan* u prostoru $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako je potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan topološki prostor.

Zbog važnosti kompaktnih podskupova topološkog prostora postavlja se pitanje njihovog jednostavnijeg opisa, kao što je, u slučaju realne prave, teorema 2.3.

U proizvoljnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$ svaki konačan skup je kompaktan, pa ako sa $\mathcal{C}(X)$ označimo kolekciju svih kompaktnih podskupova datog prostora, a sa $\mathcal{K}(X)$ kolekciju njegovih konačnih podskupova, onda je

$$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{C}(X) \subset P(X).$$

Definicija 3.4 Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je Hausdorfov prostor ako i samo ako za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2 da je $x \in O_1$ i $y \in O_2$.

Drugim rečima, Hausdorfovi su topološki prostori u kojima svake dve tačke imaju disjunktne okoline. Takav prostor je na primer $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$, takođe i prizvoljan metrički prostor.

Ako se, pri proučavanju kompaktnih podskupova topoloških prostora ograničimo na Hausdorfove prostore dobijamo nove rezultate.

Teorema 3.1 Neka je $(X,\mathcal{O})$ Hausdorfov prostor i $A\subset X$ kompaktan skup.

a) Ako $x\notin A$, onda postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V, takvi da $x\in V$ i $A\subset U$.

b) Skup A je zatvoren. Uopšte, važi $\mathcal{C}(X)\subset\mathcal{F}$.

Dokaz.

a) Neka je A kompaktan skup i $x\notin A$. Kako je $(X,\mathcal{O})$ Hausdorfov prostor, za svaku tačku $a\in A$ postoje otvoreni skupovi $U_a, V_a\in\mathcal{O}$ takvi da je $a\in U_a, x\in V_a$ i $U_a\cap V_a=\emptyset$.

Sada je $A\subset\bigcup_{a\in A}U_a$ pa, zbog kompaktnosti skupa A, postoje skupovi $U_{a_1},...,U_{a_k}$ da je $A\subset U_{a_1}\cup...\cup U_{a_k}=U$. Tada je skup $V=V_{a_1}\cap...\cap V_{a_k}$ otvoren i sadrži tačku x, a kako za svako $i\leq k$ iz $V\subset V_{a_i}$ sledi $V\cap U_{a_i}$ imamo $V\cap U=\emptyset$.

b) Prema a), za svako $x\in X\setminus A$ postoji $V\in\mathcal{O}$ da $x\in V\subset X\setminus A$. Dakle, skup $X\setminus A$ je okolina svake svoje tačke, pa je otvoren, a A zatvoren skup. ■

4. PRESLIKAVANJE KOMPAKTNIH PROSTORA

Može se pokazati da ako je $(X,\mathcal{O}_X)$ kompaktan prostor i $(Y,\mathcal{O}_Y)$ proizvoljan topološki prostor, i $f: X \to Y$ neprekidna sirjekcija, onda je i prostor $(Y,\mathcal{O}_Y)$ kompaktan.

Neprekidna preslikavanja kompaktnih prostora imaju važne osobine. Navodimo neke od njih.

Teorema 4.1 Neprekidna funkcija preslikava komaktan skup na kompaktan skup.

Dokaz.

Neka su $(X,\mathcal{O}_X)$ i $(Y,\mathcal{O}_Y)$ topološki prostori i neka je $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje, a $A \subset X$ kompaktan skup. Pokažimo da je kompaktan i skup $f[A]$.

Sirjektivna restrikcija $f|A\colon A \to f[A]$ je neprekidna sirjekcija, pa kompaktnost prostora $(A,\mathcal{O}_A)$ daje kompaktnost prostora $(f[A],(\mathcal{O}_Y)_{f[A]})$, to jest, po definiciji, kompaktnost skupa $f[A]$. ■

U nastavku navodimo uopštenje teoreme Vajerštrasa koja kaže da neprekidna funkcija nad zatvorenim intervalom dostiže svoj supremum i infimum.

Teorema 4.2 Neprekidna realna funkcija nad kompaktnim prostorom dostiže minimalnu i maksimalnu vrednost.

Dokaz.

Neka je $(X,\mathcal{O})$ kompaktan prostor i $f: X \to \mathbb{R}$ neprekidna fukcija. Dokažimo da tada postoje tačke $x_0, x_1 \in X$, takve da za svako $x \in X$ važi $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$.

Na osnovu prethodne teoreme $f[X] \subset \mathbb{R}$ je kompaktan skup, pa je, prema Hajne- Borelovoj teoremi, zatvoren i ograničen. Zbog ograničenosti skupa $f[X]$ postoje $y_0 = inf f[X]$ i $y_1 = sup f[X]$, a zbog zatvorenosti tog skupa važi $y_0, y_1 \in f[X]$. Neka su tačke $x_0, x_1 \in X$ takve da je $y_0 = f(x_0)$ i $y_1 = f(x_1)$. Sada za proizvoljnu tačku $x \in X$ važi $f(x) \in f[X]$, pa je $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. ■

Komentar:

Ako je f neprekidna na kompaktnom skupu $K \subset X$, ona je na njemu $uniformno$ neprekidna. (Pokazuje se pomoću osobinama metričkog prostora i Hajne- Borelove teoreme.)

5. KOMPAKTNOST U METRIČKIM PROSTORIMA

Podsetimo se, (X, d) je kompaktan ako i samo ako važi definicija 3.2, pri čemu su otvoreni skupovi definisani otvorenim loptama. Takođe, za podskup K metričkog prostora (X, d) kažemo da je kompaktan ako se iz svakog pokrivača skupa K otvorenim podskupovima prostora X može izdvojiti konačan potpokrivač.

Stav 5.1 Ako je K kompaktan metrički prostor i F zatvoren podskup prostora K, tada je F kompaktan skup.

Dokaz.

Neka je $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ otvoreni pokrivač skupa F. Kako je skup F zatvoren, njegov komplement $K \setminus F$ je otvoren, pa je $\{K \setminus F\} \cup \{U_\alpha | \alpha \in A\}$ otvoreni pokrivači celog prostora K. Zato postoji njegov konačan potpokrivač, on je očigledno i pokrivač skupa $F \subset K$; kako taj potpokrivač, jasno, ne može sadržati elemenat $K \setminus F$, to smo na taj način dobili konačan potpokrivač $\{U_\alpha | \alpha \in A\}$ skupa F. Dakle, F je kompaktan skup. ■

S obzirom da je (X, d) Hausdorfov na osnovu Teoreme 3.1 sledi da je u kompaktnom metričkom prostoru skup $F \subset X$ kompaktan ako i samo ako je zatvoren.

Definicija 5.1 Metrički prostor je $separabilan$ ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup tačaka.

Teorema 5.1 Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.

Prema Hajne- Borelovoj teoremi podskup A realne prave je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen. Ovakva karakterizacija kompaktnosti važi i u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, pa se postavlja pitanje da li ovakva karakterizacija kompaktnih skupova važi u svakom metričkom prostoru.

Teorema 5.2 Kompaktan podskup metričkog prostora je zatvoren i ograničen.

Dokaz.

Neka je skup A kompaktan u metričkom prostoru (X, d). Prostor (X, d) je Hausdorfov pa je, prema Teoremi 3.1, skup A zatvoren. Neka $x \in X$. Tada je $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L(x, n)$, pa, zbog kompaktnosti skupa A, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da je $A \subset \bigcup_{n \leq n_0} L_n(x) = L_{n_0}(x)$. Zato je $\rho(A) \leq \rho(L_{n_0}(x))$, to jest A je ograničen skup. ■

Međutim, obratna implikacija ne važi generalno, što pokazuje sledeći primer.

Primer 5.1 Zatvoren i ograničen skup koji nije kompaktan.

Posmatrajmo potprostor $\mathbb{Q}$ prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{uob})$. Skup $[0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ je zatvoren i ograničen, ali nije kompaktan u prostoru $\mathbb{Q}$, jer se lako može napraviti niz $\{a_n\} \in [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, $\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{2}$, ali $\sqrt{2} \notin [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.□

Zaključak

Tema rada bila je proučavanje pojma kompaktnosti. Posto smo definisali topološki prostor, pojam kompaktnosti smo najpre uveli pomoću skupa realnih brojeva, a zatim smo je definisali u proizvoljnom topološkom prostoru. Takodje, govorili smo i o preslikavanju kompaktnih prostora.

Literatura

1. Snežana Simić, *O svojstvu kompaktnosti*, diplomski rad, PMF Novi Sad, 2008.
2. Ljiljana Gajić, *Predavanja iz uvoda u analizu*, Univerzitet u Novom Sadu PMF, Novi Sad, 2004.
3. Miloš Kurilić, *Osnovi opšte topologije*, Univerzitetski udžbenik 3, Univerzitet u Novom Sadu, 1998.
4. Đurđica Takači, Arpad Takači, *Zbirka zadataka iz analize* I, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1989.
5. S. Aljančić, *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.