

1. Metrički prostor. Definicija i primeri.

Odgovor:

DEFINICIJA 1. *Metrički prostor* je uređeni par (X, d) gde je X neprazan skup, a d preslikavanje $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ za koje važe sledeći uslovi:

- (a) za sve $x, y \in X$ važi $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (b) za sve $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(y, x)$ [simetričnost];
- (c) za sve $x, y, z \in X$ važi $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [nejednakost trougla].

Preslikavanje d se naziva *metrika na skupu* X , a broj $d(x, y)$ je *rastojanje tačaka* x i y .

PRIMERI:

- (a) (\mathbb{R}, d) je metrički prostor gde je rastojanje d definisano na sledeći uobičajeni način:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

- (b) (\mathbb{R}^2, d) je metrički prostor sa metrikom d definisanom na sledeći način:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

gde je $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- (c) Neka je $C_{[a,b]}$ skup neprekidnih, realnih funkcija definisanih nad intervalom $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Za $f, g \in C_{[a,b]}$ definišemo d na sledeći način:

$$(1) \quad d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Tada je $(C_{[a,b]}, d)$ metrički prostor.

DEFINICIJA 2: Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r > 0$. Skup

$$L(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

je *otvorena lopta* u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a i sa poluprečnikom r .

LEMA 1: Neka je $L(x_0, r)$ proizvoljna otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d) . Tada važi:

$$(\forall x \in L(x_0, r))(\exists \varepsilon = \varepsilon_x > 0)(L(x, \varepsilon) \subset L(x_0, r)).$$

Dokaz: Treba pokazati za neku proizvoljnu tačku $y \in L(x, \varepsilon)$ važi i $y \in L(x_0, r)$. Tražimo ε koje zadovoljava tu relaciju. Neka je $x \in L(x_0, r)$ i neka je $\varepsilon := r - d(x_0, x)$. Iz $y \in L(x, \varepsilon)$ znamo da je $d(x, y) < \varepsilon$. Sledi

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < r - \varepsilon + \varepsilon = r,$$

odnosno $y \in L(x_0, r)$. \square

2. Nizovi i tačke nagomilavanja u metričkom prostoru. Košijevi nizovi i kompletnost.

Odgovor:

DEFINICIJA 6: U metričkom prostoru (X, d) kažemo da niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka tački $a \in X$, što označavamo sa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, ako važi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$.

Iz definicije 6 sledi da niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka $a \in X$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > n_0(\varepsilon) \implies a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

TEOREMA 1: Ako niz $\{a_n\} \subset X$ konvergira u metričkom prostoru (X, d) , tada je granična vrednost niza jednoznačno određena.

Dokaz: Neka je dat niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pretpostavimo da važi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ gde je $a \neq b$, odnosno $d(a, b) > 0$. Biramo proizvoljno $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = \frac{d(a, b)}{3}$. Tada važi

$$(\exists n_a(\varepsilon))(\forall n > n_a)(d(a_n, a) < \varepsilon) \quad \text{i} \quad (\exists n_b(\varepsilon))(\forall n > n_b)(d(a_n, b) < \varepsilon).$$

Neka je $n_0 = \max(n_a, n_b)$. Za $\forall n > n_0$ važi

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(b, a_n) < \frac{d(a, b)}{3} + \frac{d(a, b)}{3} = \frac{2}{3}d(a, b),$$

što je kontradikcija. \square

Neka je dat metrički prostor (X, d) i skup $A \subset X$. Tačka a je *tačka nagomilavanja skupa* A ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)((L(a, \varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset).$$

TEOREMA 2: Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subset X$ i a tačka nagomilavanja skupa A . Tada postoji niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u A takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

DEFINICIJA 8: Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je *Košijev* ako važi sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon),$$

odnosno, u ekvivalentnom obliku:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)$$

TEOREMA 4: Ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u X konvergentan onda je i Košijev.

Dokaz: Neka je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan. Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, odnosno:

$$(2) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$$

Primenjujući (2) za $\frac{\varepsilon}{2}$ dobijamo da je

$$(3) \quad d(x_n, x) < \varepsilon \text{ za sve } n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Iz (3) sledi da za sve $m, n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = n'_0(\varepsilon)$ važi

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema definiciji 8 sledi da je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev. \square

DEFINICIJA 9: Metrički prostor (\mathbb{R}, d) je *kompletan* ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira, odnosno ako za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u X postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{N}$.

PRIMERI:

- (a) Metrički prostor (\mathbb{R}, d) , gde je $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, je kompletan.
- (b) Metrički prostor (\mathbb{Q}, d) , gde je $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, nije kompletan.
- (c) Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ takvo preslikavanje da je f neprekidna i ograničena funkcija na X . Označimo sa $C_b(X)$ skup svih ograničenih i neprekidnih funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Metrika d u $C_b(X)$ je definisana na sledeći način:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C_b(X)$$

Metrički prostor $(C_b(X), d)$ je kompletan.

3. Normirani prostori, odnos norme i metrike, Banahov prostor**Odgovor:**

DEFINICIJA 13: Neka je $v : X \rightarrow [0, \infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

- 1° $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2° $v(\lambda x) = |\lambda|v(x), \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in X$
- 3° $v(x + y) \leq v(x) + v(y), \forall x, y \in X$

Tada kažemo da je preslikavanje v *norma nad* X , a uredjen par (X, v) je *normiran prostor*.

PRIMERI:

- 1° $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ je normiran prostor ako je norma $\|\cdot\|_p$, gde je $p \geq 1$, definisana na sledeći način:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{gde je } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2° Prostor $C([a, b])$ neprekidnih realnih funkcija nad intervalom $[a, b]$ je normiran prostor ako je norma u $C([a, b])$ definisana na sledeći način:

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad f \in C[a,b].$$

Svaki normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ je i metrički prostor (X, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \text{za sve } x, y \in X$$

Dokaz: Proverićemo da d ima sledeće osobine:

$$1^\circ \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2^\circ \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \text{za sve } x, y, z \in X$$

$$3^\circ \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \text{za sve } x, y, z \in X$$

1° : Sledi iz ekvivalencija:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2° : Kako je $\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$ sledi da je $d(x, y) = d(y, x)$ za sve $x, y \in X$.

3° : $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$ za sve $x, y, z \in X$. \square

DEFINICIJA 14: Ako je normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ kompletan metrički prostor onda ga nazivamo *Banahov prostor*.

DEFINICIJA 15: U normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ se može definisati *konvergentan red* $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$, gde je $y_i \in X$, za svako $i \in \mathbb{N}$. Kažemo da je red $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ konvergentan i $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$ ako je $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i$. Red $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ je *apsolutno konvergentan* ako je red $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\|$ konvergentan.

Zbir $s_n = \sum_{i=1}^n y_i$ se zove n -ta parcijalna suma reda $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$, pa je red konvergentan ako i samo ako je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma.

TEOREMA 9: Normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$ je Banahov ako i samo ako je svaki apsolutno konvergentan red i konvergentan.

Dokaz:

(\Rightarrow) Pretpostavimo da je $(X, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i neka je red $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentan. Treba da dokažemo da $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, niz njegovih parcijalnih suma konvergira. Pošto je $(X, \|\cdot\|)$ Banahov prostor, dovoljno je pokazati da je $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz. Posmatrajmo stoga

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n}^{n+p} x_k.$$

Iz nejednakosti $\left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\|$ za sve $n, p \in \mathbb{N}$, i apsolutne konvergencija posmatranog reda sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ i za sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$d(s_{n+p}, s_n) = \|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon,$$

odnosno niz $\left\{ \sum_{k=1}^m x_k \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ je Košijev što je i trebalo da sedokaže.

(\Leftarrow) Pretpostavimo da je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz u X . Dokažaćemo da niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz, pa je i čitav niz konvergentan jer je Košijev.

Pošto je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev, birajući $\varepsilon = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$, dobijamo podniz $\{x_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ takav da je:

$$(4) \quad \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

pri čemu je $n_j < n_{j+1}$.

Iz uslova (4) sledi da red $\sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_j} - x_{n_{j+1}})$ apsolutno konvergira jer je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Na onovu pretpostavke da je svaki apsolutno konvergentan red i konvergentan, sledi da red $\sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_j} - x_{n_{j+1}})$ konvergira, što znači da postoji

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} ((x_{n_1} - x_{n_2}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \dots + (x_{n_{m-1}} - x_{n_m})) \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_{n_1} - x_{n_m}) = x_{n_1} - \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m}. \end{aligned}$$

Odavde sledi da je podniz $\{x_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ konvergentan. Kako je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev niz koji sadrži konvergentan podniz, sledi da je i čitav niz konvergentan, te je $(X, \|\cdot\|)$ Banahov prostor. \square

4. Hilbertovi prostori, ortogonalnost, projekcija tačke na skup

Odgovor:

U Hilbertovom prostoru preko ortonormirane baze moguće je izraziti svaki element prostora kao linearnu kombinaciju vektora baze. Za početak, daćemo definicije pred-Hilbertovog i Hilbertovog prostora, ortogonalne i ortonormirane baze, kao i formulacije i dokaze nekih korisnih teorema.

Definicija 1: Neka je \mathbb{V} vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i definisano je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{F}$. Preslikavanje $(\cdot|\cdot)$ se naziva skalarni proizvod ako važe sledeći uslovi:

- (a) $(x|x) \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{V}$ i $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (b) $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$, za sve $x, y, z \in \mathbb{V}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
- (c) $(x|y) = \overline{(y|x)}$ za sve $x, y \in \mathbb{V}$.

U tom slučaju uredjen par $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ se zove pred-Hilbertov prostor.

Primeri pred-Hilbertovog prostora su $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ gde je

$$(x|y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

kao i skup neprekidnih funkcija $C_{[a,b]}$ u kojem je definisan skalarni proizvod

$$(f|g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in C_{[a,b]}.$$

Teorema 1: Ako je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ pred-Hilbertov prostor, $(\mathbb{V}, \|\cdot\|)$ je normiran prostor, gde je $\|x\|^2 = (x|x)$, za sve $x \in \mathbb{V}$.

Dokaz: Pre svega $\|x\| \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{V}$ jer je $(x|x) \geq 0$. Takodje, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, jer je $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Važi relacija $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, za sve $x \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{F}$ jer je

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda \bar{\lambda} (x|x) = \lambda^2 \|x\|^2 \text{ te je } \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \text{ za sve } x \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Preostaje da se pokaže da važi (nejednakost trougla) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, za sve $x, y \in \mathbb{V}$.

Pretpostavimo, za trenutak, da važi Koši-Švarcova nejednakost:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{V}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

pa je tvrdjenje dokazano. \square

U svakom pred-Hilbertovom prostoru važi Koši-Švarcova nejednakost:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Dokaz: Jasno, bez umanjenja opštosti, može se pretpostaviti da je $y \neq 0$. Takodje, da bi argumentacija bila očiglednija, pretpostavimo da je skalarni proizvod definisan nad \mathbb{R} . Posmatra se izraz

$$\|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Ovo je kvadratna funkcija po λ sa minimalnom vrednošću u tački $\lambda_* = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$.

Jasno, iz $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$ direktno sledi da je odgovarajuća kvadratna funkcija nenegativna za sve vrednosti λ . Posebno, u tački λ_* važi

$$\langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)^2 \langle y, y \rangle \geq 0,$$

odakle sledi $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, odnosno $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, što je i trebalo pokazati. \square

Zakon paralelograma je potreban i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizvoda $(\cdot|\cdot)$ koji generiše normu $\|\cdot\|$ nad normiranim prostorom X i glasi

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \text{ za sve } x, y \in X.$$

Definicija 2: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ pred-Hilbertov prostor i $x, y \in \mathbb{V}$. Elementi x i y su ortogonalni ako važi $(x|y) = 0$. Ako je $z \in \mathbb{V}$ tako da je $\|z\| = 1$ kažemo da je z normiran element.

Za ortogonalne vektore važi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Definicija 3: Kompletan pred-Hilbertov prostor je Hilbertov prostor.

Definicija 4: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ Hilbertov prostor $M \subset \mathbb{V}$. Ortogonalni komplement skupa M , u oznaci M^\perp , je skup

$$M^\perp = \{y; y \in \mathbb{V}, (x|y) = 0, \text{ za sve } x \in M\}.$$

Skup M^\perp je zatvoren podskup od \mathbb{V} i važi implikacija $A \subset B \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$. Jasno, $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$, tačka $x \in X$ i skup $A \subset X$. Ako postoji $a \in A$ takav da je $\|x - a\| \leq \|x - y\|$ za sve $y \in A$, onda je a projekcija tačke x na skup A . Često se koristi oznaka $P_A(x) = a$.

Teorema 3: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ Hilbertov prostor i M zatvoren potprostor od \mathbb{V} . Tada

- (a) Za svaki element $x \in \mathbb{V}$ postoji jedinstvena projekcija na potprostor M .
- (b) Svaki element $x \in \mathbb{V}$ se na jedinstven način može predstaviti u obliku:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, \quad x_2 \in M^\perp$$

što označavamo sa $V = M \oplus M^\perp$.

5. Linearna nezavisnost, potpun ortonormiran sistem

Odgovor:

Definicija 5: U vektorskom prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ vektor $a \in \mathbb{V}$ je linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{V}$ ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$. Kolekcija svih vektora $a \in \mathbb{V}$ takvih da je a linearna kombinacija vektora a_1, a_2, \dots, a_n označava se sa $\text{span} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Skup $\text{span} \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je potprostor od \mathbb{V} .

Definicija 6: U vektorskom prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ skup vektora $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je linearno nezavisan ako

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

važi samo kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Prema tome, skup vektora $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je linearno nezavisan ako nijedan od njegovih elemenata nije linearna kombinacija preostalih elemenata tog skupa. U suprotnom kažemo da je dati skup vektora linearno zavisan, pa tada postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ od kojih je bar jedan različit od nule i važi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Definicija 7: Skup vektora $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ je baza vektorskog prostora \mathbb{V} ako je linearno nezavisan i ako je $\text{span} \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \mathbb{V}$. Broj n se zove dimenzija prostora \mathbb{V} .

Definicija 8: Skup nenula vektora je ortogonalan ako su svaka dva vektora u tom skupu ortogonalna. Skup od jednog vektora je ortogonalan po definiciji. Ortogonalan skup vektora u kome je svaki vektor normiran¹ je ortonormiran skup.

Teorema 5: Neka je dat ortogonalan skup vektora $\{u_1, \dots, u_n\}$ u pred-Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$. Tada je taj skup linearno nezavisan.

¹Vektor $x \in \mathbb{V}$ je normiran ako je $\|x\| = 1$.

Dokaz: Neka je $a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = \vec{0}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Za svako $k \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{0}|u_k) \\ &= (a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n|u_k) \\ &= a_1(u_1|u_k) + a_2(u_2|u_k) + \dots \\ &\quad + a_{k-1}(u_{k-1}|u_k) + a_k(u_k|u_k) + a_{k+1}(u_{k+1}|u_k) + \dots + a_n(u_n|u_k) \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_{k-1} \cdot 0 + a_k(u_k|u_k) + a_{k+1} \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 \\ &= a_k(u_k|u_k), \end{aligned}$$

odakle sledi da je $a_k = 0$. Kako to važi za svako $k \in \{1, \dots, n\}$, sledi da je skup $\{u_1, \dots, u_n\}$ linearno nezavisan. \square

Teorema Gram-Schmidt: Svaki konačno dimenzionalan pred-Hilbertov prostor ima ortonomiranu bazu.

Dokaz: Neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ linearno nezavisan skup vektora koji je baza za pred-Hilbertov prostor $\mathbb{V}(\mathbb{F})$. Sledećim postupkom, koji se zove Gram - Šmitov postupak orogonalizacije prevešćemo tu bazu u novu bazu $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ koja je ortogonalna, a zatim ćemo te vektore normirati.

U prvom koraku, uzima se da je $b_1 = a_1$. Pošto je skup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ skup nenula vektora, sledi $b_1 \neq \vec{0}$ i skup $\{b_1\}$ je ortogonalan po definiciji.

Vektor b_2 dobijamo na sledeći način:

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2|b_1)}{(b_1|b_1)}b_1.$$

Sledi $b_2 \neq \vec{0}$ jer su a_1 i a_2 linearno nezavisni. Pokazaćemo da su b_1 i b_2 ortogonalni.

$$(b_2|b_1) = (a_2|b_1) - \frac{(a_2|b_1)}{(b_1|b_1)}(b_1|b_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \perp b_1.$$

Vektor b_3 dobija se po analogiji:

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3|b_1)}{(b_1|b_1)}b_1 - \frac{(a_3|b_2)}{(b_2|b_2)}b_2.$$

Očigledno, $b_3 \neq \vec{0}$ jer je koeficijent uz a_3 jednak sa 1, pa bi, u suprotnom (kada bi b_3 bio nula vektor) a_3 bio linearno zavisen od a_1 i a_2 .

Ortogonalnost vektora b_3 i b_2 sledi iz

$$(b_3|b_2) = (a_3|b_2) - \frac{(a_3|b_1)}{(b_1|b_1)}(b_1|b_2) - \frac{(a_3|b_2)}{(b_2|b_2)}(b_2|b_2) = 0.$$

Na isti način se pokazuje da je $b_3 \perp b_1$.

Dakle, opšte rekurentno pravilo za ovaj postupak je

$$b_1 = a_1, \quad b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{(a_{k+1}|b_i)}{(b_i|b_i)} b_i, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Ovim postupkom dobija se ortogonalna baza. Da bi vektori bili normirani, potrebno je svakog od njih podeliti sa svojom normom. Dakle, sa

$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}, e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}, \dots, e_n = \frac{b_n}{\|b_n\|}.$$

dobija se ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. \square

Definicija 9: Skup vektora $S = \{s_i; i \in I\}$ u pred-Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ je ortonormiran sistem ako je za sve $i, j \in I$

$$(s_i|s_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Ortonormiran sistem uvek postoji jer ako je $s \neq \vec{0} \in \mathbb{V}$ onda je $S = \left\{ \frac{s}{\|s\|} \right\}$ ortonormiran sistem u $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$.

Teorema: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot))$ pred-Hilbertov prostor i neka je dat ortonormiran skup vektora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Ako je vektor u definisan na sledeći način

$$u = \sum_{k=1}^n a_k e_k,$$

tada za koeficijente a_k važi $a_k = (u, e_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Definicija: Ortonormiran sistem $S = \{s_k, k \in \mathbb{N}\}$ je potpun u Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot))$ akko za proizvoljan ortonormiran sistem \bar{S} važi:

$$S \subset \bar{S} \Rightarrow S = \bar{S}.$$

Teorema: U proizvoljnom pred–Hilbertovom prostoru postoji potpun ortonormiran sistem.

Teorema: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot))$ pred–Hilbertov prostor. Tada je skup $S = \{s_k, k \in \mathbb{N}\}$ potpun ortonormiran sistem akko za svaki element pred–Hilbertovog prostora H važi:

$$(x, s_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

6. Furijeovi koeficijenti, trigonometrijski redovi Furijeja

Odgovor:

Definicija: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred–Hilbertov prostor, $x \in V$ i $E = \{e_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ potpun ortonormiran sistem. Brojevi $x_\alpha = (x|e_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ iz polja F su **Furijeovi koeficijenti**.

Teorema 1: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred–Hilbertov prostor. Tada je skup Furijeovih koeficijenata $\{x_\alpha; \alpha \in \Lambda, x_\alpha \neq 0\}$ za $x \in V$ najviše **prebrojiv**.

Teorema 2: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred–Hilbertov prostor. Ako je $\{x_{\alpha_i}; i \in \mathbb{N}\}$ skup Furijeovih koeficijenata za $x \in V$ koji su različiti od nule, tada važi **Beselova nejednakost**:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2$$

Teorema 4: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ Hilbertov prostor, $S = \{e_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ kompletan ortogonalan sistem i $x \in V$. Tada je:

$$x = \sum_{i \in I_x} x_i e_i,$$

gde je $x_i = (x|e_i)$, $i \in I_x$.

Trigonometrijski sistem $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ je jedan ortogonalan sistem funkcija u pred–Hilbertovom prostoru (po delovima) neprekidnih funkcija nad $[-\pi, \pi]$ sa skalarnim proizvodom $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$:

$$(1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} -\frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0), \\ x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n = 0); \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \begin{cases} -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n \neq 0), \\ 0 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n = 0); \end{cases}$$

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n); \end{cases}$$

$$(4) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \pi & (m = n); \end{cases}$$

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx = 0,$$

pri čemu je pri izvodjenju formula (3) i (4) iskorišćena formula (1), a pri izvodjenju (5) iskorišćena je formula (2).

Definicija 1 Neka je $f(x)$ funkcija s periodom 2π , koja na intervalu $[-\pi, \pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste. *Trigonometrijski red Furijski* (ili, kraće, Furijev red) funkcije f je dat sa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

pri čemu su koeficijenti definisani sledećom formulom

$$(7) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Koristiće se zapis

$$(8) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Neka je $f(x)$ funkcija s proizvoljnim periodom $2l$.

Ukoliko se f može razviti u konvergentan red, dobija se

$$(9) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

gde su:

$$(10) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots); \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Red (9) s koeficijentima određenim formulama (10), naziva se Furijeov red za funkciju $f(x)$ s periodom $2l$.

7. Tačkasta konvergencija trigonometrijskih redova Furijeja, Beselova nejednakost i Riman-Lebegova lema

Odgovor:

Neka je X pred-Hilbertov prostor funkcija koje su deo po deo neprekidne na $[-\pi, \pi]$ i za svako $x \in (-\pi, \pi)$ postoji konačan levi i desni limes. Posmatraćemo podklasu klase X, X' . $f \in X' \Leftrightarrow$

(a) $f \in X$

(b) U svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$ postoje odgovarajući desni, odnosno levi izvodi:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x_+)}{h} \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$$

gde je $f(x_+) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(x + \xi)$ desna granična vrednost funkcije f u x .

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x-h) - f(x_-)}{h} \quad \forall x \in (-\pi, \pi]$$

gde je $f(x_-) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} f(x - \xi)$ leva granična vrednost funkcije f u x . Dakle,

$$X' = \{f \in X \mid f \text{ ima odgovarajuće jednostrane izvode na } [-\pi, \pi]\}$$

TEOREMA (Dirihleov dovoljan uslov) Neka je $f \in X'$. Tada za $\forall x \in (-\pi, \pi)$ Furijeov red funkcije f konvergira ka vrednosti:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka:

$$\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2},$$

Ako je f neprekidna u tački x , tada je $f(x_-) = f(x_+)$, pa prema tome važi:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x).$$

Dakle, Furijeov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u ovoj tački.

Sledi da ako je f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$, tada Furijeov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$.

DOKAZ DIRIHLEOVE TEOREME Možemo pretpostaviti da se funkcije $f \in X'$ periodično produžuju na čitav skup R , tj. $\tilde{f}(x+2k\pi) = f(x)$. Za svaki prirodan broj m , S_m je m -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f :

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

PROPOZICIJA 1: Za zadato $f \in X'$ važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt$$

Dokaz:

Iz definicije koeficijenata a_n i b_n imamo:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \sum_{n=1}^m \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ns ds \cdot \cos nx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ns ds \cdot \sin nx \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m [\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx] \right] ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos n(s-x) \right] ds.
\end{aligned}$$

Uvodjenjem smene $t = s - x$ dobijamo:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt.$$

Za svaku 2π periodičnu funkciju g i za bilo koji realan broj a važi:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

Prema tome dokazali smo da važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt \quad \square$$

U sledećoj propoziciji ćemo pokazati da se suma u uglastoj zagradi može zapisati pomoću sinusne funkcije.

PROPOZICIJA 2: $\forall m \in \mathbb{N}$ važi:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Dokaz:

Leva strana jednakosti je definisana za $\forall t \in \mathbb{R}$, a desna za $t \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Može se pokazati da je $t = 2k\pi$ tačka otklonivog prekida funkcije:

$$\frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}.$$

Neka je $t \in R \setminus \{2k\pi\} | k \in Z$. Koristimo trigonometrijski identitet:

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)].$$

Oдавde sledi da je za svaki prirodan broj k i realno r :

$$\cos kt \cdot \sin \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) t \right], \quad k=1, \dots, m$$

pa je:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \left[\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos mt \right] &= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t \\ + \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t + \dots + \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t, \quad t \in R \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane sa $\sin \frac{1}{2}t$ propozicija je dokazana. \square

DEFINICIJA: Funkcije

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx, \quad x \in R \setminus \{2k\pi\} \text{ za zadato } m \in N$$

zovu se **Dirihleovo jezgro** (reda m).

Iz prethodne propozicije sledi da je:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{1}{2}x}, \quad x \in R \setminus \{2k\pi\} \text{ za zadato } m \in N.$$

Tačke $t = 2k\pi$, gde imenilac nestaje, su otklonjive tačke prekida.

PROPOZICIJA 3: Za $\forall m \in N \int_0^\pi D_m(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

Dokaz:

$$\int_0^\pi D_m(x) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos mx \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi \cos 2x dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx dx \\
&= \frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin x \Big|_0^\pi}_{=0} + \cdots + \underbrace{\sin mx \Big|_0^\pi}_{=0} = \frac{\pi}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

PROPOZICIJA 4 (Beselova nejednakost) Neka je $f \in X$ i neka su $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ Furijeovi koeficijenti funkcije f . Tada važi:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \|f\|^2.$$

PROPOZICIJA 5 (Riman - Lebegova lema) Ako je $f \in X$ i ako su $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ Furijeovi koeficijenti funkcije f tada važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{ tj.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0.$$

PROPOZICIJA 6: Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju $g(x)$ $x \in [0, \pi]$ važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

Dokaz:

Definišimo dve funkcije

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t) \cos \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases} \quad \text{i} \quad h_2(t) = \begin{cases} g(t) \sin \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

Kako je $g(x)$ deo po deo neprekidna na intervalu $[0, \pi]$ sledi da su obe funkcije h_1 i h_2 deo po deo neprekidne na $[0, \pi]$. Sada je:

$$\int_0^\pi g(t) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t dt = \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \cos \frac{t}{2}}^{h_1(t)} \sin mt dt}_{b_m \text{ za } h_1(t)} + \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \sin \frac{1}{2} t \cos mt}^{h_2(t)} dt}_{a_m \text{ za } h_2(t)}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t) \sin mt \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t) \cos mt \, dt.$$

Iz Riman-Lebegove leme sledi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(h_2) = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} b_m(h_1) = 0 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0.$$

□

Nastavak dokaza Dirihleove teoreme: Želimo da dokažemo da:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \forall x \in (-\pi, \pi)$$

(za $x = \pm\pi$ dokazuje se analogno, tačnije posmatranjem periodičnog produženja funkcije f).

Neka je $x \in (-\pi, \pi)$ fiksiran proizvoljan broj. Uvodimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, t \in (0, \pi]$$

Dakle, g je deo po deo neprekidna na intervalu $(0, \pi]$, pošto je f deo po deo neprekidna. Treba pokazati da $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ postoji.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{ovo je desni izvod f.je.f u } x \text{ } f'_+(x)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1}$$

Pošto $f \in X'$, sledi da $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$ postoji.

Zaključujemo da je g deo po deo neprekidna na celom intervalu $[0, \pi]$.

Iz *Propozicije 6.* znamo:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t \, dt = 0,$$

odnosno:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) \cdot \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_+) \cdot \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} \, dt \right] = 0.$$

Iz *Propozicije 3.* sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x_+) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_m(t) dt = \frac{f(x_+)}{2}. \\ \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= \frac{f(x_+)}{2}. \end{aligned}$$

Slično za $t \in [-\pi, 0)$ definišemo:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

Koristimo da f ima levi izvod u x_- . Ponovimo prethodno izvodjenje na $[-\pi, 0]$ i dobićemo:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \cdot \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_-)}{2}.$$

Konačno:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) D_m(t) dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_m(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x+t) D_m(t) dt \right] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}. \end{aligned}$$

□

8. Uniformna konvergencija trigonometrijskih redova Furijea, Parsevalova jednakost

Odgovor:

DEFINICIJA Neka je $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ niz funkcija definisanih na intervalu $[a, b]$ i neka je funkcija f definisana na $[a, b]$. Kažemo da niz $\{f_m\}_{m=1}^\infty$ konvergira uniformno ka funkciji f na intervalu $[a, b]$ ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj $n(\varepsilon)$ takav da važi $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svako $m \geq n(\varepsilon)$ i za svako x iz intervala $[a, b]$.

TEOREMA (o uniformnoj konvergenciji) Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$ i ako je f' deo po deo neprekidna, tj. $f' \in X$, tada Furijeov red funkcije f konvergira uniformno ka f na $[-\pi, \pi]$.

Skup funkcija koje ispunjavaju uslove prethodne teoreme označavaće se sa X' .

Napomena: Ako je $f' \in X$ sledi da $f \in X'$.

DOKAZ: Neka $f' \in X$ i neka je

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx], \quad \text{a}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Odredimo sada vezu izmedju α_n, β_n i a_n, b_n .

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} (f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da je $f(-\pi) = f(\pi)$.

Za $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx dx \right] \\ &= \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \\ &= nb_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nx dx \right] \\ &= -na_n. \end{aligned}$$

Dakle, važi: $\alpha_n = nb_n$, $\beta_n = -na_n$.

Za ovaj dokaz ćemo koristiti **Vajerštrasov kriterijum uniformne konvergencije** koji glasi:

Ako postoji brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c > 0$ koji konvergira pri čemu za svako $n \in \mathbb{N}$ i svako x iz nekog intervala I važi $|f_n(x)| \leq c_n$ onda funkcionalni red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na I .

Znamo da važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} |a_n \cos nx| &\leq |a_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \quad \text{i} \\ |b_n \sin nx| &\leq |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokažimo sada konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}$$

Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)}.$$

Ranije smo dokazali da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, pa je $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

Na osnovu Beselove nejednakosti dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) \leq \|f'\|^2 < \infty,$$

pa je i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} < \infty$, odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ konvergira.

Sada sledi da brojni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiraju, a iz Vajerštrasove teoreme sledi da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ uniformno konvergiraju, pa i Furijeov red funkcije f uniformno konvergira.

Treba još pokazati da red konvergira baš ka funkciji f . Iz $f' \in X$ sledi da f ispunjava uslove Dirihleove teoreme, pa imamo tačkastu konvergenciju ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$. To znači da konvergira uniformno ka f na celom intervalu. \square

Podsetimo se, ortonormiran sistem vektora $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ je potpun ako iz $(x, e_\lambda) = 0$ za sva $\lambda \in \Lambda$ sledi $x = 0$.

PROPOZICIJA Ako za ortonormiran sistem vektora $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$$

onda je taj sistem potpun.

Jednakost iz prethodne propozicije se naziva Parsevalova jednakost. Potreban i dovoljan uslov da ona važi je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - S_m\| = 0,$$

gde je S_m projekcija vektora x na potprostor $\text{span}\{e_1, \dots, e_m\}$.

TEOREMA 1 (Parsevalova jednakost) Za svaku $f \in X$ važi jednakost:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (a)$$

gde su a_n i b_n Furijeovi koeficijenti od f .

TEOREMA 2 (Uopštena Parsevalova jednakost) Za svako $f, g \in E$ važi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{a_0 \overline{c_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{c_n} + b_n \overline{d_n})$$

gde su:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos nx + d_n \sin nx]$$

TEOREMA 3 (Jedinstvenost Furijeovog reda) Ako su $f, g \in X$ i ako su Furijeovi redovi od f i g jednaki, tada je $f(x) = g(x)$ osim u konačnom broju tačaka.

9. Furijeova transformacija

Odgovor:

Neka je $f : R \rightarrow C$. Formalno definišemo funkciju $F : R \rightarrow C$ sa:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Nesvojstveni integral sa desne strane može da postoji, ali i ne mora. Ukoliko postoji, funkcija F se zove Furijeova transformacija funkcije f . Furijeov red je namenjen za funkcije definisane na konačnom intervalu (ili periodične funkcije definisane na celom R). Furijeova transformacija se koristi za funkcije definisane na celom R (koje nisu periodične).

Uvodimo oznaku $G(R)$ koja predstavlja familiju funkcija $f : R \rightarrow C$ koje su deo po deo neprekidne i apsolutno integrabilne. Primećujemo:

- (a) f je deo po deo neprekidna na celom R ako je deo po deo neprekidna na svakom konačnom intervalu $[a, b]$. f može imati beskonačan broj prekida (ali samo konačan broj na svakom konačnom podintervalu).
- (b) f je apsolutno integrabilna na R ako $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ tj. integral nad R od $|f(x)|$ postoji i konačan je.

$G(R)$ je vektorski prostor nad C . Iz definicije sledi da za svaku funkciju $f \in G(R)$ Furijeova transformacija funkcije F je definisana za svako $\omega \in R$.

Teorema: Za svaku $f \in G(R)$ važi:

- (a) $F(\omega)$ je definisana za $\forall \omega \in R$
- (b) $F(\omega) \in C(R)$, tj. $F(\omega)$ je neprekidna funkcija na R
- (c) $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} F(\omega) = 0$

Za dokaz navedene teoreme koristimo kao pomoćnu teoremu, Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji, koja glasi:

Teorema: Neka je $\{f_h\}_{h \in \mathbb{R}}$ familija deo po deo neprekidnih funkcija za koju važi $\lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ako postoji funkcija g takva da je $|f_h(x)| \leq g(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, tako da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx < \infty$, tada važi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Pomoćna teorema obezbedjuje uslove za ulazak limesa pod integral. Drugim rečima, postojanje funkcije g koja zadovoljava uslove navedene u Lebegovoj teoremi, dozvoljava promenu redosleda operacija, pri čemu se očuvava ista vrednost.

Dokaz. 1. Iz činjenice da je $|e^{-i\omega x}| = 1$ za svako realno x i ω , sledi da je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

tako da je funkcija $f(x)e^{-i\omega x}$ apsolutno integrabilna na \mathbb{R} , za svako realno ω . Uz to, funkcija $f(x)e^{-i\omega x}$ je deo po deo neprekidna, pa ona pripada klasi $G(\mathbb{R})$. Dakle, $F(\omega)$ je dobro definisana za svako realno ω .

2. Neka je $\omega \in R$. Treba da se dokaže neprekidnost funkcije F u tački ω , odnosno $\lim_{h \rightarrow 0} [F(\omega + h) - F(\omega)] = 0$. Iz definicije funkcije F sledi:

$$\begin{aligned} [F(\omega + h) - F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+h)x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] dx. \end{aligned}$$

Za svako realno h definišemo funkciju $f_h(\omega) = f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1]$. Sada za $\forall x \in R$ važi

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f_h(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x)e^{-i\omega x} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x)e^{-i\omega x} \lim_{h \rightarrow 0} [e^{-ihx} - 1] \\ &= f(x)e^{-i\omega x} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Uz to:

$$|f_h(x)| \leq |f(x)| |e^{-i\omega x}| (|e^{-ihx}| + 1) \leq |f(x)| \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot |f(x)|.$$

Funkcija $g(x) = 2|f(x)|$ zadovoljava uslove Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji, pa kao posledicu imamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) dx = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [F(\omega + h) - F(\omega)] = 0,$$

odakle sledi tražena neprekidnost. \square

3. Po definiciji je

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \right). \end{aligned}$$

Za dokaz $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$ dovoljno je dokazati

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx = 0.$$

Dokazi navedenih jednakosti su analogni, pa ćemo pokazati samo za prvi limes.

S obzirom da je funkcija f apsolutno integrabilna, za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $M > 0$ tako da je $\int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon$ i:

$$\left| \int_{|x|>M} f(x) \cos \omega x dx \right| \leq \int_{|x|>M} |f(x) \cos \omega x| dx \leq \int_{|x|>M} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Pošto je funkcija f deo po deo neprekidna na intervalu $[-M, M]$ postoji podela intervala $[-M, M]$:

$$-M = x_0 < x_1 < \dots < x_m = M$$

takva da stepenasta funkcija $h(x) = f(x_k)$, $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ zadovoljava:

$$\int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon.$$

Drugim rečima, možemo aproksimirati funkciju stepenastom funkcijom h . Ova činjenica je posledica definicije Rimanovog integrala. Kako je

$$\int_{-M}^M f(x) \cos \omega x dx = \int_{-M}^M (f(x) - h(x)) \cos \omega x dx + \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx,$$

posmatramo sabirke na desnoj strani jednakosti. Za svako $\omega \in R$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M (f(x) - h(x)) \cos \omega x dx \right| &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| |\cos \omega x| dx \\ &\leq \int_{-M}^M |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-M}^M h(x) \cos \omega x dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) \cos \omega x dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^m f(x_k) \frac{\sin \omega x_k - \sin \omega x_{k-1}}{\omega} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m |f(x_k)| \frac{2}{\omega} \\ &\leq \frac{2}{\omega} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)|, \end{aligned}$$

pa, za dovoljno veliko ω važi

$$\frac{2m}{\omega} \max_{-M \leq x \leq M} |f(x)| < \varepsilon.$$

Konačno, za dovoljno veliko ω dobija se

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \right| < 3\varepsilon,$$

čime je dokazana treća stavka teoreme, i samim tim je i teorema u potpunosti dokazana. \square

Primer: Neka je data funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{gde je } -\infty < a < b < \infty. \end{cases}$$

Ova funkcija se zove karakteristična funkcija intervala $[a, b]$ ili jedinični impuls na $[a, b]$. Odrediti Furijeovu transformaciju funkcije f .

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \Big|_a^b = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{2\pi \cdot i \cdot \omega}$$

Ako je $a = -b$, $b > 0$, dobija se $F(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{2\pi \cdot i \cdot \omega} = \frac{\sin \omega b}{\omega \pi}$, odnosno, ako je $\text{sinc}(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$, važi $F(\omega) = \frac{b}{\pi} \text{sinc}(b\omega)$.

Dva značajna svojstva Furijeove transformacije:

- (a) Neka je f neprekidna i diferencijabilna funkcija takva da $f, f' \in G(R)$. Tada važi:

$$F_{[f']}(\omega) = (i\omega)F_{[f]}(\omega)$$

Na isti način se može dokazati da ako su $f, f', f'', \dots, f^{n-1}$ neprekidne i diferencijabilne i $f, f', f'', \dots, f^n \in G(R)$. Onda:

$$F_{[f^n]}(\omega) = (i \cdot \omega)^n F_{[f]}(\omega).$$

- (b) Neka je $f \in G(R)$ takva da integral $\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx$ konvergira. Tada je Furijeova transformacija funkcije xf neprekidno diferencijabilna i zadovoljava jednakost:

$$F_{[xf(x)]}(\omega) = i \frac{d}{d\omega} F_{[f]}(\omega)$$

10. Inverzna Furijeova transformacija

Odgovor:

Neka je $F(\omega)$ po delovima neprekidna i apsolutno integrabilna funkcija. Tada je **inverzna Furijeova transformacija** formalno definisana sa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega.$$

Teorema:(Fubinijeva teorema) Neka je $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deo po deo neprekidna funkcija. Pretpostavimo da integrali $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy$ konvergiraju. Ako konvergira jedan od integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy \quad \text{ili} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy dx$$

onda konvergira i drugi, i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx.$$

Teorema:(o inverznoj Furijeovoj transformaciji): Ako $f \in G(\mathbb{R})$ onda za svaku tačku $x \in \mathbb{R}$, u kojoj postoje jednostrani izvodi funkcije f važi:

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Dokaz: U dokazu se koristi Fubinijeva teorema.

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M F(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \int_{-M}^M \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \right] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\int_{-M}^M e^{-i\omega y} e^{i\omega x} d\omega \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left[\frac{e^{i\omega(x-y)}}{i(x-y)} \Big|_{-M}^M \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M F(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{2 \sin M(x-y)}{x-y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy + \frac{1}{\pi} \int_x^{\infty} \frac{f(y) \sin M(x-y)}{x-y} dy. \end{aligned}$$

Nakon smene $t = y - x$ dobija se

$$\int_{-M}^M F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt.$$

Tvrdimo da je

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f(x^+)}{2}$$

i da je

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \frac{f(x^-)}{2}.$$

Dokazaćemo samo prvi rezultat jer se drugi dokazuje analogno. Kako je

$$\int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt + \int_{\pi}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt,$$

definišemo

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{t}, & t > \pi \\ 0, & t \leq \pi. \end{cases}$$

Iz uslova sledi da $f \in G(\mathbb{R})$ pa i $g \in G(\mathbb{R})$. Iz dokaza teoreme za Furijeovu transformaciju sledi

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin Mtdt = 0 \text{ tj. } \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt = 0.$$

Sada posmatramo graničnu vrednost

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt.$$

Funkcija $h(t) = \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$ je deo po deo neprekidna na $[0, \pi]$, pa i na nju možemo primeniti teoremu o Furijeovoj transformaciji:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \frac{\sin Mt}{t} dt &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} \sin Mtdt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} f(x^+) \int_0^{\pi} \frac{\sin Mt}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} f(x^+) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin Mt}{t} dt. \end{aligned}$$

Još treba da pokažemo da je granična vrednost poslednjeg izraza jednaka $\frac{\pi}{2}$.

Smenom $u = Mt$ dobija se

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{M\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

i, prema tome,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin Mt}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2},$$

što se može dokazati primenom leme

Lema: Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju $g(x)$, $x \in [0, \pi]$, važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0$$

i na osnovu osobina konvergentnih nesvojstvenih integrala.

Primer: Znamo da je sinc funkcija Furijeova transformacija jediničnog impulsa. Iz formule za inverznu Furijeovu transformaciju i koristeći osobine parnosti i neparnosti, za $|x| \neq b$ dobija se:

$$\begin{aligned} f(x) &= P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega b}{\omega \pi} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega \pi} d\omega + \lim_{M \rightarrow \infty} i \int_{-M}^M \frac{\sin \omega b \sin \omega x}{\omega \pi} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^M \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

U tačkama $x = \pm b$ funkcija $f(x)$ nije neprekidna, pa na osnovu prethodno dokazane teoreme integral konvergira ka poluzbiru leve i desne granične vrednosti, koja je jednaka sa $\frac{1}{2}$. Dakle,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega b \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & |x| < b \\ \frac{1}{2}, & |x| = b \\ 0, & |x| > b. \end{cases}$$

Za $x = 0$ i $b = 1$ dobija se $\int_0^\infty \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$

Posledica: Ako je f neprekidna funkcija i ako je f' deo po deo neprekidna funkcija onda važe sledeće formule:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \forall \omega \in \mathbb{R},$$

$$f(x) = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ako pretpostavimo da $F(\omega) \in G(\mathbb{R})$ onda je

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega(-x)} d\omega = \frac{1}{2\pi} f(-x),$$

odnosno

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$$

Primer: Furijeova transformacija funkcije $f(x) = e^{-|x|}$ je data sa

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)}.$$

Obe funkcije $F(\omega) \in G(\mathbb{R})$ i $f \in G(\mathbb{R})$ su neprekidne i neprekidno diferencijabilne. Iz formule za inverznu Furijeovu transformaciju sledi:

$$\begin{aligned} e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} e^{i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1 + \omega^2)} [\cos \omega x + i \sin \omega x] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\pi(1 + \omega^2)} d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\pi(1 + \omega^2)} d\omega. \end{aligned}$$

Čisto imaginarni deo se "poništava" jer je $e^{-|x|}$ realna funkcija. Pošto je $\cos x$ parna funkcija, sledi da je funkcija $f(x) = e^{-|x|}$ jednaka nesvojstvenom integralu

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-|x|}.$$

Napomena: Ako postoji $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M g(x) dx$ tu vrednost zovemo glavna vrednost (*Principal value*) integrala, u oznaci

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx$$

Od značaja su sledeće posledice prethodne teoreme.

Posledica: Ako $f \in G(\mathbb{R})$, f je neprekidna, f' je deo po deo neprekidna, važe sledeće formule:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$$f(x) = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Ako pretpostavimo da $F(\omega) \in G(\mathbb{R})$ onda:

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} \omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega(-x)} d\omega = \frac{1}{2\pi} f(-x)$$

Dobijamo formulu:

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi} f(-x)$$