

# Dirihleova teorema

današnje predavanje

Department of Mathematics and Informatics

23 novembar 2009



- $X$  je pred-Hilbertov prostor funkcija koje imaju konačno mnogo tačaka prekida prve vrste na  $[-\pi, \pi]$ .
- $X' = \{f \in X \mid f \text{ ima odgovarajuće jednostrane izvode na } [-\pi, \pi]\}$ .

### Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je  $f \in X'$ . Tada za  $\forall x \in (-\pi, \pi)$  trigonometrijski red Furijea funkcije  $f$  konvergira ka

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama  $x = \pm\pi$  konvergira ka  $\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}$ .

- $X$  je pred-Hilbertov prostor funkcija koje imaju konačno mnogo tačaka prekida prve vrste na  $[-\pi, \pi]$ .
- $X' = \{f \in X \mid f \text{ ima odgovarajuće jednostrane izvode na } [-\pi, \pi]\}$ .

### Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je  $f \in X'$ . Tada za  $\forall x \in (-\pi, \pi)$  trigonometrijski red Furijea funkcije  $f$  konvergira ka

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama  $x = \pm\pi$  konvergira ka  $\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}$ .

- $X$  je pred-Hilbertov prostor funkcija koje imaju konačno mnogo tačaka prekida prve vrste na  $[-\pi, \pi]$ .
- $X' = \{f \in X \mid f \text{ ima odgovarajuće jednostrane izvode na } [-\pi, \pi]\}$ .

## Teorema

(Dirihleova teorema) Neka je  $f \in X'$ . Tada za  $\forall x \in (-\pi, \pi)$  trigonometrijski red Furijea funkcije  $f$  konvergira ka

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama  $x = \pm\pi$  konvergira ka  $\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}$ .

## Napomene:

- ① Ako pretpostavimo da je  $f$  definisana na celom skupu  $\mathbb{R}$  i ako je  $2\pi$ -periodična, tada važi  $f(\pi_+) = f(-\pi_+)$ , pa je

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

Slična situacija je i sa krajnjom tačkom  $x = -\pi$ .

- ② Ako je  $f$  neprekidna u tački  $x$ , tada je  $f(x_-) = f(x_+)$ , pa prema tome važi:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x),$$

pa u tačkama neprekidnosti, Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$ , odnosno imamo tačkastu konvergenciju.

- ③ Na osnovu prethodno rečenog, ako je  $f$  neprekidna na intervalu  $[-\pi, \pi]$  i važi  $f(-\pi) = f(\pi)$ , tada Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$  u svakoj tački  $x \in [-\pi, \pi]$ , a slično važi i za  $2\pi$ -periodične funkcije.

## Napomene:

- ① Ako pretpostavimo da je  $f$  definisana na celom skupu  $\mathbb{R}$  i ako je  $2\pi$ -periodična, tada važi  $f(\pi_+) = f(-\pi_+)$ , pa je

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

Slična situacija je i sa krajnjom tačkom  $x = -\pi$ .

- ② Ako je  $f$  neprekidna u tački  $x$ , tada je  $f(x_-) = f(x_+)$ , pa prema tome važi:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x),$$

pa u tačkama neprekidnosti, Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$ , odnosno imamo tačkastu konvergenciju.

- ③ Na osnovu prethodno rečenog, ako je  $f$  neprekidna na intervalu  $[-\pi, \pi]$  i važi  $f(-\pi) = f(\pi)$ , tada Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$  u svakoj tački  $x \in [-\pi, \pi]$ , a slično važi i za  $2\pi$ -periodične funkcije.

## Napomene:

- ① Ako pretpostavimo da je  $f$  definisana na celom skupu  $\mathbb{R}$  i ako je  $2\pi$ -periodična, tada važi  $f(\pi_+) = f(-\pi_+)$ , pa je

$$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

Slična situacija je i sa krajnjom tačkom  $x = -\pi$ .

- ② Ako je  $f$  neprekidna u tački  $x$ , tada je  $f(x_-) = f(x_+)$ , pa prema tome važi:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x),$$

pa u tačkama neprekidnosti, Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$ , odnosno imamo tačkastu konvergenciju.

- ③ Na osnovu prethodno rečenog, ako je  $f$  neprekidna na intervalu  $[-\pi, \pi]$  i važi  $f(-\pi) = f(\pi)$ , tada Furijeov red funkcije  $f$  konvergira ka  $f(x)$  u svakoj tački  $x \in [-\pi, \pi]$ , a slično važi i za  $2\pi$ -periodične funkcije.

Za svaki prirodan broj  $m$ ,  $S_m$  je  $m$ -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije  $f$ :

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

### Lema

Za zadato  $f \in X'$  važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

### Lema

Za svaki broj  $m \in \mathbb{N}$  važi:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}, \quad t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Za svaki prirodan broj  $m$ ,  $S_m$  je  $m$ -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije  $f$ :

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

### Lema

Za zadato  $f \in X'$  važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

### Lema

Za svaki broj  $m \in \mathbb{N}$  važi:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}, \quad t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Za svaki prirodan broj  $m$ ,  $S_m$  je  $m$ -ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije  $f$ :

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

### Lema

Za zadato  $f \in X'$  važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos nt \right] dt, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

### Lema

Za svaki broj  $m \in \mathbb{N}$  važi:

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(m + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{1}{2} t}, \quad t \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Dokaz** Tačka  $t = 2k\pi$  tačka otklonjivog prekida funkcije  $\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$ .

Neka je  $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Na osnovu

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

sledi

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \left[ \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt \right] &= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t \\ + \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right)t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa  $\sin \frac{1}{2}t$  dobija se tvrdjenje.  $\square$

**Dokaz** Tačka  $t = 2k\pi$  tačka otklonjivog prekida funkcije  $\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$ .

Neka je  $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Na osnovu

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

sledi

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \left[ \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt \right] &= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t \\ + \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right)t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa  $\sin \frac{1}{2}t$  dobija se tvrdjenje.  $\square$

**Dokaz** Tačka  $t = 2k\pi$  tačka otklonjivog prekida funkcije  $\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$ .

Neka je  $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Na osnovu

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

sledi

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \left[ \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt \right] &= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t \\ + \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right)t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa  $\sin \frac{1}{2}t$  dobija se tvrdjenje.  $\square$

**Dokaz** Tačka  $t = 2k\pi$  tačka otklonjivog prekida funkcije  $\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$ .

Neka je  $t \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Na osnovu

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

sledi

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \left[ \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos mt \right] &= \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}t \\ + \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t + \cdots + \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t - \sin \left(m - \frac{1}{2}\right)t \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(m + \frac{1}{2}\right)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Deljenjem obe strane jednakosti sa  $\sin \frac{1}{2}t$  dobija se tvrdjenje.  $\square$

## Definicija

Dirihleovo jezgro (reda  $m \in \mathbb{N}$ ) je definisano sa

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Iz prethodne leme sledi:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tačke  $t = 2k\pi$ , u kojima je imenilac jednak nuli, su tačke otklonjivog prekida.

## Lema

Za Dirihleovo jezgro reda  $m \in \mathbb{N}$  važi  $\int_0^\pi D_m(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .

## Definicija

Dirihleovo jezgro (reda  $m \in \mathbb{N}$ ) je definisano sa

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Iz prethodne leme sledi:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tačke  $t = 2k\pi$ , u kojima je imenilac jednak nuli, su tačke otklonjivog prekida.

## Lema

Za Dirihleovo jezgro reda  $m \in \mathbb{N}$  važi  $\int_0^\pi D_m(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .

## Definicija

Dirihleovo jezgro (reda  $m \in \mathbb{N}$ ) je definisano sa

$$D_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Iz prethodne leme sledi:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{1}{2}x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tačke  $t = 2k\pi$ , u kojima je imenilac jednak nuli, su tačke otklonjivog prekida.

## Lema

Za Dirihleovo jezgro reda  $m \in \mathbb{N}$  važi  $\int_0^\pi D_m(x) dx = \frac{\pi}{2}$ .

**Dokaz**

$$\int_0^\pi D_m(x) dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx \right) dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi \cos 2x dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^\pi + \cdots + \sin mx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Kako je  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , važi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{-ikx},$$

odakle se dobija kompleksni oblik Dirihleovog jezgra:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^m e^{inx}.$$

**Dokaz**

$$\begin{aligned} \int_0^\pi D_m(x) dx &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi \cos 2x dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^\pi + \cdots + \sin mx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Kako je  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , važi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{-ikx},$$

odakle se dobija kompleksni oblik Dirihleovog jezgra:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^m e^{inx}.$$

**Dokaz**

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi D_m(x) dx &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi \cos 2x dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx dx \\
 &= \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^\pi + \cdots + \sin mx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Kako je  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , važi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{-ikx},$$

odakle se dobija kompleksni oblik Dirihleovog jezgra:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^m e^{inx}.$$

**Dokaz**

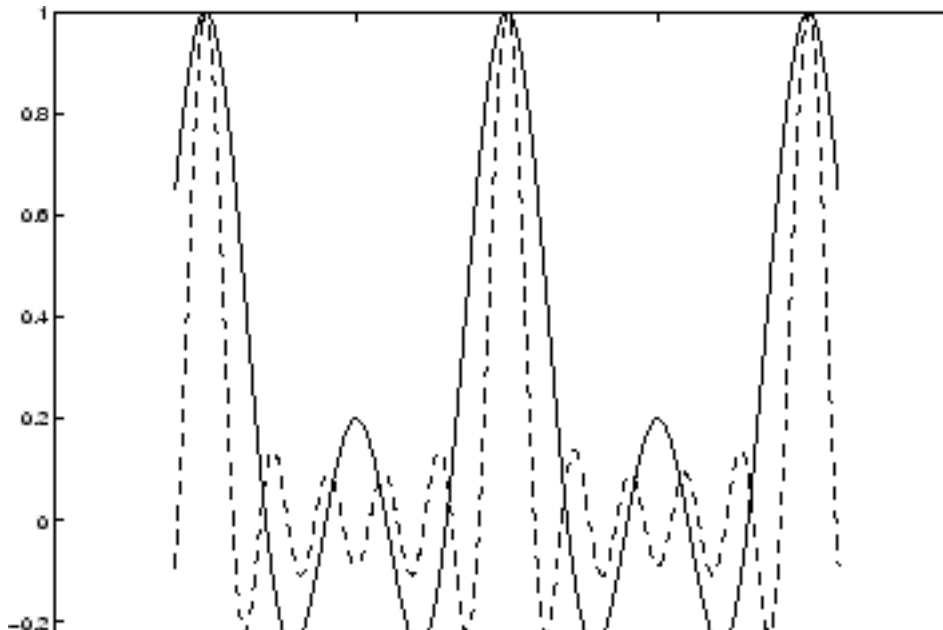
$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi D_m(x) dx &= \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x dx + \int_0^\pi \cos 2x dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx dx \\
 &= \frac{\pi}{2} + \sin x \Big|_0^\pi + \cdots + \sin mx \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}. \quad \square
 \end{aligned}$$

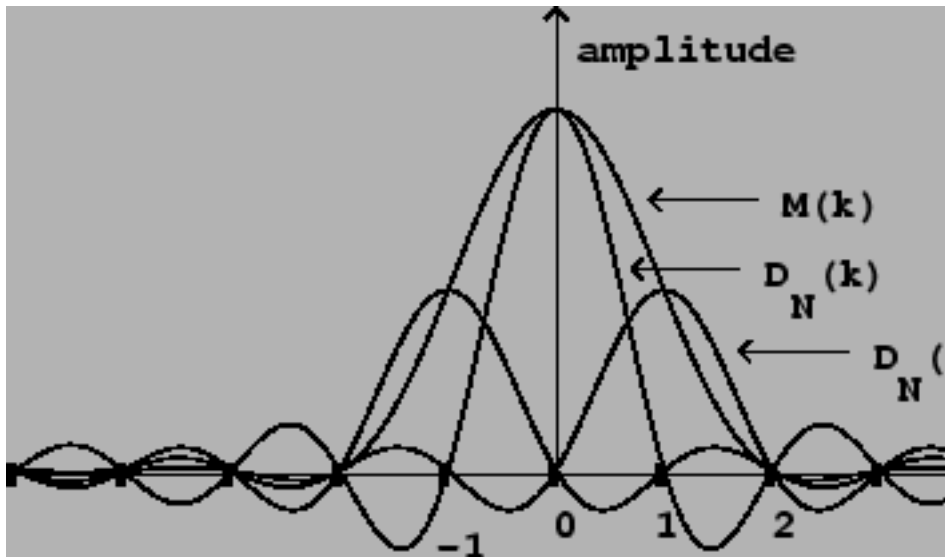
Kako je  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , važi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{ikx} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} e^{-ikx},$$

odakle se dobija kompleksni oblik Dirihleovog jezgra:

$$D_m(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-m}^m e^{inx}.$$





## Lema

(Beselova nejednakost za trigonometrijske redove Furijeja) Neka je  $f \in X$  i neka su  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ , Furijeovi koeficijenti funkcije  $f$ . Tada važi:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \|f\|^2.$$

**Dokaz** Lema je direktna posledica činjenice da u pred-Hilbertovom prostoru sa ortonormiranom bazom  $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$  važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

U našem slučaju bazu čine funkcije

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \right\},$$

a koeficijenti su brojevi  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ .

## Lema

(Beselova nejednakost za trigonometrijske redove Furijeja) Neka je  $f \in X$  i neka su  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ , Furijeovi koeficijenti funkcije  $f$ . Tada važi:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \|f\|^2.$$

**Dokaz** Lema je direktna posledica činjenice da u pred-Hilbertovom prostoru sa ortonormiranom bazom  $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$  važi

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(f, e_k)|^2 \leq \|f\|^2.$$

U našem slučaju bazu čine funkcije

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots \right\},$$

a koeficijenti su brojevi  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ .

Za  $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  imamo:

$$|(f, e_0)|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right|^2 = \left| \frac{a_0}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{|a_0|^2}{2}$$

Ako je  $e_k(x) = \cos kx$ ,  $k \geq 1$ , tada je:

$$|(f, e_k)|^2 = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right|^2 = |a_k|^2.$$

Slično, ako je  $e_k(x) = \sin kx$ , tada je:  $|(f, e_k)| = |b_k|$ .

Ovim je lema dokazana.  $\square$

## Lema

(Riman - Lebegova lema): Neka je data funkcija  $f \in X$  i neka su  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$  njeni Furijeovi koeficijenti. Tada  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , odnosno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

**Dokaz** Iz Beselove nejednakosti sledi konvergencija brojnog reda

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Odavde sledi da opšti član reda teži ka nuli, pa je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ &\text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \end{aligned}$$

## Lema

(Riman - Lebegova lema): Neka je data funkcija  $f \in X$  i neka su  $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$  njeni Furijeovi koeficijenti. Tada  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , odnosno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

**Dokaz** Iz Beselove nejednakosti sledi konvergencija brojnog reda

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Oдавde sledi da opšti član reda teži ka nuli, pa je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n|^2 = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \end{aligned}$$

## Lema

Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju  $g(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

**Dokaz** Uvodimo oznake:

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t) \cos \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases} \quad \text{i} \quad h_2(t) = \begin{cases} g(t) \sin \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

## Lema

Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju  $g(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

**Dokaz** Uvodimo oznake:

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t) \cos \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases} \quad \text{i} \quad h_2(t) = \begin{cases} g(t) \sin \frac{t}{2}, & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

Kako je  $g(x)$  deo po deo neprekidna na intervalu  $[0, \pi]$  sledi da su funkcije  $h_1$  i  $h_2$  deo po deo neprekidne na  $[0, \pi]$ . Važi:

$$\int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \cos \frac{t}{2}}^{h_1(t)} \sin mt dt}_{b_m \text{ za } h_1(t)} + \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \sin \frac{t}{2}}^{h_2(t)} \cos mt dt}_{a_m \text{ za } h_2(t)}$$

$$= \int_{-\pi}^\pi h_1(t) \sin mt dt + \int_{-\pi}^\pi h_2(t) \cos mt dt.$$

Iz Riman-Lebegove leme sledi  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(h_2) = 0$ , i, takodje,  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m(h_1) = 0$ ,

pa je  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$ .  $\square$

Kako je  $g(x)$  deo po deo neprekidna na intervalu  $[0, \pi]$  sledi da su funkcije  $h_1$  i  $h_2$  deo po deo neprekidne na  $[0, \pi]$ . Važi:

$$\int_0^{\pi} g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = \underbrace{\int_0^{\pi} \overbrace{g(t) \cos \frac{t}{2}}^{h_1(t)} \sin mt dt}_{b_m \text{ za } h_1(t)} + \underbrace{\int_0^{\pi} \overbrace{g(t) \sin \frac{t}{2}}^{h_2(t)} \cos mt dt}_{a_m \text{ za } h_2(t)}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t) \sin mt dt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t) \cos mt dt.$$

Iz Riman-Lebegove leme sledi  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(h_2) = 0$ , i, takodje,  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m(h_1) = 0$ ,

pa je  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0$ .  $\square$

Kako je  $g(x)$  deo po deo neprekidna na intervalu  $[0, \pi]$  sledi da su funkcije  $h_1$  i  $h_2$  deo po deo neprekidne na  $[0, \pi]$ . Važi:

$$\int_0^\pi g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \cos \frac{t}{2}}^{h_1(t)} \sin mt dt}_{b_m \text{ za } h_1(t)} + \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t) \sin \frac{t}{2}}^{h_2(t)} \cos mt dt}_{a_m \text{ za } h_2(t)}$$

$$= \int_{-\pi}^\pi h_1(t) \sin mt dt + \int_{-\pi}^\pi h_2(t) \cos mt dt.$$

Iz Riman-Lebegove leme sledi  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m(h_2) = 0$ , i, takodje,  $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m(h_1) = 0$ ,

pa je  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t dt = 0$ .  $\square$

Treba pokazati da važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

a za  $x = \pm\pi$  dokaz je analogan.

Neka je dato  $x \in (-\pi, \pi)$  i neka je

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in (0, \pi].$$

Pošto je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija, sledi da je i  $g$  deo po deo neprekidna funkcija na  $(0, \pi]$ . Treba pokazati da postoji  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{desni izvod u } x: f'(x_+)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1}.$$

Pošto  $f \in X'$ , sledi da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$  postoji, pa je  $g$  deo po deo neprekidna na celom intervalu  $[0, \pi]$ .

Treba pokazati da važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

a za  $x = \pm\pi$  dokaz je analogan.

Neka je dato  $x \in (-\pi, \pi)$  i neka je

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in (0, \pi].$$

Pošto je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija, sledi da je i  $g$  deo po deo neprekidna funkcija na  $(0, \pi]$ . Treba pokazati da postoji  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{desni izvod u } x: f'(x_+)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1}.$$

Pošto  $f \in X'$ , sledi da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$  postoji, pa je  $g$  deo po deo neprekidna na celom intervalu  $[0, \pi]$ .

Treba pokazati da važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

a za  $x = \pm\pi$  dokaz je analogan.

Neka je dato  $x \in (-\pi, \pi)$  i neka je

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in (0, \pi].$$

Pošto je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija, sledi da je i  $g$  deo po deo neprekidna funkcija na  $(0, \pi]$ . Treba pokazati da postoji  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{desni izvod u } x: f'(x_+)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1}.$$

Pošto  $f \in X'$ , sledi da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$  postoji, pa je  $g$  deo po deo neprekidna na celom intervalu  $[0, \pi]$ .

Treba pokazati da važi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, \quad \forall x \in (-\pi, \pi),$$

a za  $x = \pm\pi$  dokaz je analogan.

Neka je dato  $x \in (-\pi, \pi)$  i neka je

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad t \in (0, \pi].$$

Pošto je  $f$  deo po deo neprekidna funkcija, sledi da je i  $g$  deo po deo neprekidna funkcija na  $(0, \pi]$ . Treba pokazati da postoji  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{desni izvod u } x: f'(x_+)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1}.$$

Pošto  $f \in X'$ , sledi da  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$  postoji, pa je  $g$  deo po deo neprekidna na celom intervalu  $[0, \pi]$ .

Iz jedne od lema sledi:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0$ , odnosno:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right] = 0.$$

Iz jedne od lema sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x_+) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_m(t) dt = \frac{f(x_+)}{2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

Iz jedne od lema sledi:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t dt = 0$ , odnosno:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right] = 0.$$

Iz jedne od lema sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x_+) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_m(t) dt = \frac{f(x_+)}{2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

Iz jedne od lema sledi:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t dt = 0$ , odnosno:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right] = 0.$$

Iz jedne od lema sledi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_+) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= f(x_+) \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= f(x_+) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_m(t) dt = \frac{f(x_+)}{2}, \end{aligned}$$

pa je

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+t) \cdot \sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

Slično, za  $t \in [-\pi, 0)$  definišemo

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

pri čemu, u razmatranjima sada koristimo da  $f$  ima levi izvod u  $x$  i ponavljamo prethodno izvodjenje na  $[-\pi, 0]$ . Tako se dobija

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \cdot \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_-)}{2},$$

pa je, konačno,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_m(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt \right] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

□

Slično, za  $t \in [-\pi, 0)$  definišemo

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

pri čemu, u razmatranjima sada koristimo da  $f$  ima levi izvod u  $x$  i ponavljamo prethodno izvodjenje na  $[-\pi, 0]$ . Tako se dobija

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \cdot \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_-)}{2},$$

pa je, konačno,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_m(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt \right] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

□

Slično, za  $t \in [-\pi, 0)$  definišemo

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

pri čemu, u razmatranjima sada koristimo da  $f$  ima levi izvod u  $x$  i ponavljamo prethodno izvodjenje na  $[-\pi, 0]$ . Tako se dobija

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) \cdot \frac{\sin(m + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{f(x_-)}{2},$$

pa je, konačno,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+t) D_m(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt \right] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

□

Neka je  $f(x) = x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ . Važi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Na osnovu Dirihleove teoreme ovaj red konvergira ka  $x$  za svako  $x \in (-\pi, \pi)$ , a u krajnjim tačkama intervala,  $x = \pm\pi$ , on konvergira ka nuli.

U  $x = \frac{\pi}{2}$  dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin n \frac{\pi}{2} = 2 \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin \frac{2\pi}{2}}{2} - \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{\sin \frac{4\pi}{2}}{4} + \dots \right] \\ &= 2 \left[ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \end{aligned}$$

odnosno:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

U  $x = \frac{\pi}{4}$  dobija se

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Koristeći ove razvoje sledi

$$\sqrt{2} = \frac{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots}$$

Furijev red funkcije  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$ , je dat sa

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Na osnovu Dirihleove teoreme važi

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

U tački  $x = 0$  važi:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (*)$$

Sa druge strane, u tački  $x = \pi$  dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Poslednja jednakost se može dobiti i iz (\*), na sledeći način:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}S,$$

odakle je  $S = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}S$ , odnosno,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .