1 Furijeova transformacija

Definicija i osnovne osobine

Neka je $f : R \to C$. Formalno definišemo funkciju $F : R \to C$ sa:

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} F(x) e^{-\imath \omega x} dx.$

Nesvojstveni integral sa desne strane može da postoji, ali i ne mora. Ukoliko postoji, funkcija F se zove Furijeova transformacija funkcije f. Furijeov red je namenjen za funkcije definisane na konačnom intervalu (ili periodične funkcije definisane na celom R). Furijeova transformacija se koristi za funkcije definisane na celom R (koje nisu periodične).

Uvodimo oznaku $G(R)$ koja predstavlja familiju funkcija $f : R \to C$ koje su deo po deo neprekidne i apsolutno integrabilne. Primećujemo:

1. f je deo po deo neprekidna na celom R ako je deo po deo neprekidna na svakom konačnom intervalu $[a, b]$. f može mati beskonačan broj prekida (ali samo konačan broj na svakom konačnom podintervalu).
2. f je apsolutno integrabilna na R ako $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ tj. integral nad R od $|f(x)|$ postoji i konačan je.

$G(R)$ je vektorski prostor nad C. Iz definicije sledi da za svaku funkciju $f \in G(R)$ Furijeova transformacija funkcije F je definisana za svako $\omega \in R$.

Teorema: Za svaku $f \in G(R)$ važi:

1. $F(\omega)$ je definisana za $\forall \omega \in R$
2. $F(\omega) \in C(R)$, tj. $F(\omega)$ je neprekidna funkcija na R
3. $\lim\limits_{\omega \to +\infty} F(\omega) = 0$

Za dokaz navedene teoreme koristimo kao pomoćnu teoremu **Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji:** Neka je $\{f_h\}_{h\in R}$ familija deo po deo neprekidnih funkcija. Tada:

1. postoji funkicja g takva da $|f_h(x)| \leq g(x)$ za $\forall x \in R$ ili $\forall h \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty$
3. $\lim\limits_{h\to 0} f_h(x) = f(x)$ tada je $\lim\limits_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$

Pomoćna teorema nam obezbedjuje uslove za ulazak integrala pod limes. Drugim rečima postojanje funkcije g koja zadovoljava uslove 1. i 2. dozvoljava nam da menjamo redosled operacija i pri tome očuvavamo istu vrednost.

Dokaz:

1. Iz činjenice da je $|e^{-\imath\omega x}| = 1$ za svako realno x i ω, sledi da:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)e^{-\imath\omega x}|dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$$
tako da je funkcija $f(x)e^{-\imath\omega x}$ apsolutno integrabilna na R, za svako realno ω. Kao dodatak $f(x)e^{-\imath\omega x}$ je deo po deo neprekidna. Ispunjena su oba uslova, pa $f(x)e^{-\imath\omega x}$ pripada $G(R)$. Sledi $F(\omega)$ dobro definisana za svako realno ω.

2. Neka je $\omega \in R$. Treba da dokažemo da je F neprekidna na ω. Dokazujemo:
$$\lim_{h\to 0}[F(\omega+h) - F(\omega)] = 0$$
Iz definicije F sledi:
$$\begin{aligned}[F(\omega+h) - F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath(\omega+h)x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}[e^{-ihx} - 1]dx\end{aligned}$$

Za svako realno h definišemo funkciju:

$$f_h(\omega) = f(x)e^{-i\omega x}[e^{-ihx} - 1]$$

Sada za $\forall x \in R$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f_h(x) &= \lim_{h\to 0} f(x)e^{-i\omega x}[e^{-ihx} - 1] \\
&= f(x)e^{-i\omega x} \lim_{h\to 0}[e^{-ihx} - 1] \\
&= f(x)e^{-i\omega x} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Uz to:

$$|f_h(x)| \leq |f(x)||e^{-i\omega x}|(|e^{-ihx}| + 1) \leq |f(x)| \cdot 1 \cdot 2 = 2 \cdot |f(x)|$$

Funkcija $g(x) = 2|f(x)|$ zadovoljava uslove 1. i 2. Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji, pa kao posledicu imamo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x)dx = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}[F(\omega + h) - F(\omega)] = 0$$

i usled toga F je neprekidna za svaku tačku $\omega \in R$.

3. Po definiciji:

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) &= \lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \lim_{\omega\to\pm\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx)
\end{aligned}$$

Za dokaz $\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0$ dovoljno je dokazati:

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = 0 \ \text{ i } \ \lim_{\omega\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx = 0.$$

Dokazi navedenih jednakosti su analogni, pa je dovoljno pokazati samo za prvi sabirak. Dokaz se zasniva na definiciji Rimanovog integrala, pa se, zbog jednostavnosti daljeg izlaganja, izostavlja.

Osobine i formule

1. ***Linearnost:***

   Za svako $f, g \in G(R)$ i svako $a, b \in C$ funkcija $a \cdot f + b \cdot g \in G(R)$ i:

   $$F_{[a \cdot f + b \cdot g]}(\omega) = a \cdot F_{[f]}(\omega) + b \cdot F_{[b]}(\omega)$$

   Osobina je direktna posledica linearnosti beskonačnog integrala.

2. Neka je $f \in G(R)$. Ako je f realna funkcija (tj. $f(x) \in R$ za $\forall x \in R$) onda $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.

   Dokaz:

   $$\begin{aligned} F(-\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx} = \overline{F(\omega)} \quad \square \end{aligned}$$

3. Ako $f \in G(R)$ je parna funkcija i realna, onda je i $F(\omega)$ funkcije f parna i realna. Ako je $f \in G(R)$ neparna i realna, onda je $F(\omega)$ funkcije f neparna i čisto imaginarna.

   Dokaz:

   Dokazaćemo za parnu i realnu funkciju. Drugi deo je analogan. Pretpostavke su da je f parna fukcija i realna. Tada:

   $$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos\omega x - i \cdot \sin\omega x]dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx. \end{aligned}$$

Drugi integral je 0, jer je $f(x)\sin\omega x$ neparna funkcija od x na R. Pa ostaje deo samo sa realnim delom, sledi $F(\omega)$ funkcije f je realna funkcija. Pošto je $\cos\omega x$ parna funkcija od ω funkcija:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$$

je takodje parna.

4. ***SHIFT Formula:***

   Neka je $f \in G(R)$ i $a, b \in R, a \neq 0$, funkcija $g(x) = f(ax+b)$ pripada $G(R)$ i:

   $$F_{[g]}(\omega) = \frac{1}{|a|}e^{\frac{-i\omega b}{a}}F_{[f]}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. ***Formula izvoda:***
   Neka je f neprekidna i diferencijabilna funkcija takva da $f, f' \in G(R)$.Tada važi:

   $$F_{[f']}(\omega) = (i\omega)F_{[f]}(\omega)$$

   Na isti način se može dokazati da ako su $f, f', f'', \dots f^{n-1}$ neprekidne i diferencijabilne i $f, f', f'', \dots f^n \in G(R)$. Onda:

   $$F_{[f^n]}(\omega) = (i\cdot\omega)^n F_{[f]}(\omega).$$

6. Neka je $f \in G(R)$ takva da integral $\int_{-\infty}^{\infty}|xf(x)|\,dx$ konvergira. Tada je Furijeova transformacija funkcije xf neprekidno diferencijabilna i zadovoljava jednakost:

   $$F_{[xf(x)]}(\omega) = i\frac{d}{d\omega}F_{[f]}(\omega)$$

Tablica Furijeovih transformacija:

Osobina	Funkcija	Furijeova transformacija
	$f(t)$	$\hat{f}(\nu)$
Izvod	$f'(t)$	$2\pi i\nu f(\nu)$
Inverznost	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\nu)$
Konvolucija	$f_1(t) * f_2(t)$	$\hat{f}_1(\nu)\hat{f}_2(\nu)$
Množenje	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\hat{f}_1(\nu) * \hat{f}_2(\nu)$
Translacija	$f(t-u)$	$e^{-iu\nu}\hat{f}(\nu)$
Modulacija	$e^{i\xi t}f(t)$	$\hat{f}(\nu-\xi)$
Deljenje	$f(\frac{t}{s})$	$\|s\|\hat{f}(s\nu)$
Vremenski izvod	$f^{(p)}(t)$	$(i\nu)^p\hat{f}(\nu)$
Izvod frekvencije	$(-it)^p f(t)$	$\hat{f}^p(\nu)$
Kompleksna konjugacija	$f^*(t)$	$\hat{f}^*(-\nu)$
Hermitska simetrija	$f(t) \in R$	$\hat{f}(-\nu) = \hat{f}^*(\nu)$

Inverzna Furijeova transfomacija

Furijeova transformacija je primer matematičke formule koja uzima jednu funkciju f i proizvodi drugu F.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

Postoji i obrnut proces, kada formula uzima Furijeovu transformaciju i vraća originalnu funkciju. Ovakvu operaciju zovemo ***inverznom Furijeovom transformacijom.***
Formalno:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

U dokazu teoreme o inverznoj Furijeovoj transformaciji koristi se Fubinijevsa teorema o razmeni redosleda integraljenja, pa je, radi kompletnosti izlaganja, na ovom mestu navodimo.

Teorema 1 (Fubinijeva): Neka je $f : R \times R \to C$ deo po deo neprekidna. Pretpostavimo da integrali $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dx$ i $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|\, dy$ konvergiraju.

Ako konvergira jedan od integrala $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dxdy$ ili $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|\,dydx$ onda konvergira i drugi, i integrali $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy$ i $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dydx$ su medjusobno jednaki.

Narednu teoremu dajemo bez dokaza.

Teorema 2: (o inverznoj Furijeovoj transformaciji) Ako $f \in G(R)$ onda za svaku tačku $x \in R$, za koju postoje jednostrani izvodi, važi:

$$\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Napomena: Ako integral $\int_{-M}^{M} g(x)dx$ postoji, onda postoji i $\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} g(x)dx$ i tu vrednost zovemo glavna vrednost *(Principal value)* integrala, u oznaci

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

Od značaja su sledeće posledice prethodne teoreme.

Posledica: Ako $f \in G(R)$, f je neprekidna, f' je deo po deo neprekidna, važe sledeće formule:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$f(x) = P.V.\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Ako pretpostavimo da $F(\omega) \in G(R)$ onda:

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(-x)}d\omega = \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

Dobijamo formulu:

$$F(F(\omega))(x) = \frac{1}{2\pi}f(-x)$$

Primeri

Planšerelov identitet

Planšerelov identitet je, na neki način, pandan Parsevalovoj jednakosti.

Ako $f \in G(R)$ *i* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, onda važi: $\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega < \infty$ i pri tome je

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Ova formula se nekad zove formula održanja energije. Leva strana predstavlja energiju signala u vremenskom domenu, dok desna strana prestavlja njegovu energiju u domenu frekvencije. Planšerelov identitet je specijalan slučaj sledećeg rezultata.

Uopšten Planšerelov identitet: Ako $f, g \in G(R)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ i $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$ onda je:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_{[f]}(\omega)\overline{F_{[g]}(\omega)} d\omega$$

Ako stavimo $f = g$ u ovu formulu, onda dobijamo Planšerelov identitet. Valjanost ove formule je opravdana sledećim:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F_{[\omega]}(\omega)\overline{F_{[g]}(\omega)} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{[f]}(\omega) \left(\overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx} \right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{[f]}(\omega)\overline{g(x)} e^{i\omega x} dx d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F_{[f]}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) g(\omega) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx
\end{aligned}$$

Konvolucija

Neka su date dve funkcije f i g. Definišemo novu operaciju koja je od centralnog značaja za predmet Furijeovih transformacija i skoro svaku integralnu transformaciju. Ova operacija se zove konvolucija, u oznaci $f * g$.

Neka su f i g funkcije čiji je domen definisanosti ceo R. Za svako $x \in R$ definisemo:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Pod pretpostavkom da integral postoji, smenom dobijamo:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Drugim rečima, $f * g = g * f$. Operacija konvolucije je komutativna.

Lema 1: Ako $f, g \in G(R)$, onda konvolucija $f * g$ postoji i apsolutno je integrabilna.

Teorema 3 (o konvoluciji): Za svako $f, g \in G(R)$ važi:

$$F_{[f*g]}(\omega) = 2\pi F_{[f]}(\omega)F_{[g]}(\omega)$$

Dokaz: Pošto $f, g \in G(R)$ iz leme sledi da $f * g$ postoji i apsolutno je integrabilna. Korisitćemo Fubinijevu teoremu:

$$\begin{aligned}
F_{[f*g]}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy)e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}g(y)e^{-i\omega y}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}dx)g(y)e^{-i\omega y}dy
\end{aligned}$$

Lako se proverava (smenom) da je:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}dx = F_{[f]}(\omega)$$

Pošto ovaj integral ne zavisi od y sledi:

$$F_{[f*g]}(\omega) = F_{[f]}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy = F_{[f]}(\omega)\cdot 2\pi \cdot F_{[g]}(\omega) \quad \square$$

Šenonova teorema o uzorcima

Šenonova teorema nam obezbedjuje jednostavnu metodu izračunavanja bilo koje funkcije koja je ograničenog opsega sa frekvencijom L. Ovo je važan i centralan rezultat u obradi signala.

Teorema 4: Ako je $f \in G(R)$ i $F_{[f]}(\omega) = 0$ za svako $|\omega| \geq L$, onda važi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n\pi}{L})\frac{\sin(Lx - n\pi)}{Lx - n\pi}$$

Navedena teorema se dokazuje primenom Furijeovih transformacija.