1 Konvergencija Furijeovih redova

Furijeov red svake funkcije $f \in X$ (X je pred-Hilbertov prostor funkcija koje su deo po deo neprekidne na $[-\pi, \pi]$ i za svako $x \in (-\pi, \pi)$ postoji konačan levi i desni limes) konvergira ka f u normi prostora X. Drugim rečima, ako su a_n i b_n Furijeovi koeficijenti funkcije f, tada

$$\lim_{m\to\infty} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right) \right\|$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right) \right|^2 dx = 0.$$

Ova konvergencija nije jednaka tačkastoj. Ispitaćemo uslove koji garantuju važnu osobinu tačkaste konvergencije Furijeovog reda funkcije f ka f, tj. uslove pod kojima važi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

za svako $x \in [-\pi, \pi]$. Ova jednakost neće moći da važi za sve $x \in [-\pi, \pi]$, već samo u nekim "dobrim tačkama".

1.1 Dirihleovi uslovi i tačkasta konvergencija

Posmatraćemo podklasu klase X, X' :

$f \in X' \Leftrightarrow$

1. $f \in X$
2. U svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$ postoje odgovarajući desni, odnosno levi izvodi:

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x_+)}{h} \quad \forall x \in [-\pi, \pi)$$

gde je $f(x_+) = \lim_{\xi\to 0^+} f(x+\xi)$ desna granična vrednost funkcije f u x.

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x_-)}{h} \quad \forall x \in (-\pi, \pi]$$

gde je $f(x_-) = \lim_{\xi\to 0^+} f(x-\xi)$ leva granična vrednost funkcije f u x. Dakle,

$$X' = \{f \in X | f \text{ ima odgovarajuće jednostrane izvode na} [-\pi, \pi]\}$$

TEOREMA (Dirihleov dovoljan uslov): Neka je $f \in X'$. Tada za $\forall x \in (-\pi, \pi)$ *Furijeov red* funkcije f konvergira ka vrednosti:

$$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2},$$

a u tačkama $x = \pm\pi$ konvergira ka:

$$\frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2},$$

NAPOMENE:

1. Krajnje tačke $x = \pm\pi$ realno nisu specijalan slučaj. Ako pretpostavimo da je f definisana na celom skupu R i ako je 2π-periodična, tada iz neprekidnosti imamo $f(\pi_+) = f(-\pi_+)$, pa prema tome imamo:

   $$\frac{f(\pi_-) + f(\pi_+)}{2} = \frac{f(\pi_-) + f(-\pi_+)}{2}.$$

   Slična situacija je i sa krajnjom tačkom $x = -\pi$.

2. Ako je f neprekidna u tački x, tada je $f(x_-) = f(x_+)$, pa prema tome važi:

   $$\frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x).$$

Dakle, Furijeov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u ovoj tački.
Sledi da ako je f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$, tada Furijeov red funkcije f konvergira ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$.
Dokaz Dirihleove teoreme. Dokaz je dugačak i komplikovan, zato ćemo pre samog dokaza prvo izvesti niz pomoćnih tvrdjenja, koja će se koristiti.
Možemo pretpostaviti da se funkcije $f \in X'$ periodično produžuju na čitav skup R, tj. $\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$. Za svaki prirodan broj m, S_m je m-ta parcijalna suma Furijeovog reda funkcije f:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

PROPOZICIJA 1: Za zadato $f \in X'$ važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right] dt$$

Dokaz:

Iz definicije koeficijenata a_n i b_n imamo:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds + \sum_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\, ds \cdot \cos nx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin ns\, ds \cdot \sin nx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}[\cos ns \cos nx + \sin ns \sin nx]\right] ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n(s-x)\right] ds.$$

Uvodjenjem smene $t = s - x$ dobijamo:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right] dt.$$

Za svaku 2π periodičnu funkciju g i za bilo koji realan broj a važi:

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt.$$

Prema tome dokazali smo da važi:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos nt\right] dt\Box$$

U sledećoj propoziciji ćemo pokazati da se suma u uglastoj zagradi može zapisati pomoću sinusne funkcije.

PROPOZICIJA 2: $\forall m \in N$ važi:

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

Dokaz:

Leva strana jednakosti je definisana za $\forall t \in R$, a desna za $t \neq 2k\pi$, $k \in Z$. Može se pokazati da je $t = 2k\pi$ tačka otklonivog prekida funkcije:

$$\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

Neka je $t \in R\backslash\{2k\pi\} k \in Z$. Koristimo trigonometrijski identitet:

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right].$$

Odavde sledi da je za svaki prirodan broj k i realno r:

$$\cos kt\cdot\sin\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right],\ \text{k=1,...,m}$$

pa je:

$$\sin\frac{1}{2}t\left[\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos mt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left[\sin\frac{3}{2}t-\sin\frac{1}{2}t+\sin\frac{5}{2}t-\sin\frac{3}{2}t+\cdots+\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)t\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t,\ t\in R$$

Deljenjem obe strane sa $\sin\frac{1}{2}t$ propozicija je dokazana$\square$

DEFINICIJA: Funkcije

$$D_m(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos kx,\ x\in R\backslash\{2k\pi\}\ \text{za zadato}\ m\in N$$

zovu se **Dirihleovo jezgro** (reda m).

Iz prethodne propozicije sledi da je:

$$D_m(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}, \; x \in R\backslash\{2k\pi\} \text{ za zadato } m \in N.$$

Tačke $t = 2k\pi$, gde imenilac nestaje, su otklonjive tačke prekida.

PROPOZICIJA 3: Za $\forall m \in N \;\; \int_0^\pi D_m(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Dokaz:

$$\int_0^\pi D_m(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi dx + \int_0^\pi \cos x\,dx + \int_0^\pi \cos 2x\,dx + \cdots + \int_0^\pi \cos mx\,dx =$$

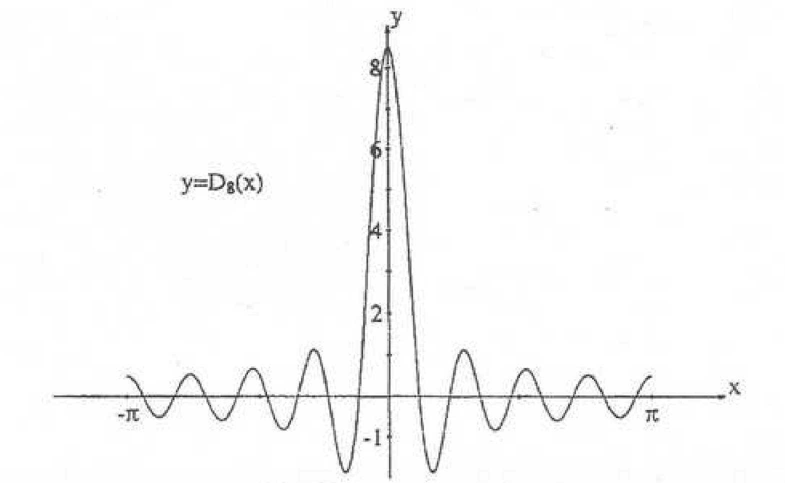
$$= \frac{\pi}{2} + \underbrace{\sin x}_{=0}|_0^\pi + \cdots + \underbrace{\sin mx}_{=0}|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Dirihleovo jezgro u *kompleksnom obliku:*

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}e^{ikx} + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}e^{-ikx}$$

$$D_m(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-m}^{m} e^{inx}$$



Dirihleovo jezgro D_8

Sledeća propozicija je specijalan slučaj Beselove nejednakosti.

PROPOZICIJA 4:(Beselova nejednakost): Neka je $f \in X$ i neka su $a_0, a_n, b_n, n \in N$ Furijeovi koeficijenti funkcije f. Tada važi:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \leq \|f\|^2.$$

PROPOZICIJA 5 (Riman - Lebegova lema): Ako je $f \in X$ i ako su $a_0, a_n, b_n, n \in N$ Furijeovi koeficijenti funkcije f tada važi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ tj.}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx \, dx = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinnx \, dx = 0.$$

Dokaz:

Posledica Beselove nejednakosti.
Naime, iz*Beselove nejednakosti* sledi konvergencija brojnog reda:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Odavde sledi da opšti član reda teži nuli:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}|a_n|^2 = 0 \Leftrightarrow &\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty}|b_n|^2 = 0 \Leftrightarrow &\quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \end{aligned}$$

□

PROPOZICIJA 6: Za svaku deo po deo neprekidnu funkciju $g(x)$ $x \in [0,\pi]$ važi:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\pi g(t)sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

Dokaz:

Definišimo dve funkcije

$$h_1(t) = \begin{cases} g(t)cos\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & -\pi \le t < 0. \end{cases} \quad \text{i } h_2(t) = \begin{cases} g(t)sin\frac{t}{2}, & 0 \le t \le \pi, \\ 0, & -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

Kako je $g(x)$ deo po deo neprekidna na intervalu $[0,\pi]$ sledi da su obe funkcije h_1 i h_2 deo po deo neprekidne na $[0,\pi]$. Sada je:

$$\int_0^\pi g(t)\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt = \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t)\cos\frac{t}{2}}^{h_1(t)}\sin mt\,dt}_{b_m \text{za } h_1(t)} + \underbrace{\int_0^\pi \overbrace{g(t)\sin\frac{1}{2}t}^{h_2(t)}\cos mt\,dt}_{a_m \text{za } h_2(t)}$$

$$= \int_{-\pi}^\pi h_1(t)\sin mt\,dt + \int_{-\pi}^\pi h_2(t)\cos mt\,dt.$$

Iz Riman-Lebegove leme sledi:

$$\lim_{m\to\infty} a_m(h_2) = 0, \lim_{m\to\infty} b_m(h_1) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\int_0^\pi g(t)sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

□

Dokaz Dirihleove teoreme: Želimo da dokažemo da:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2}, \forall x \in (-\pi,\pi)$$

(za $x = \pm\pi$ dokazuje se analogno, tačnije posmatranjem periodičnog produženja funkcije f).

Neka je $x \in (-\pi, \pi)$ fiksiran proizvoljan broj. Uvodimo pomoćnu funkciju:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_+)}{2\sin\frac{t}{2}}, t \in (0, \pi]$$

Dakle, g je deo po deo neprekidna na intervalu $(0, \pi]$, pošto je f deo po deo neprekidna. Treba pokazati da $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ postoji.

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\text{ovo je desni izvod f-je} f \text{u x } f'_+(x)} \cdot \underbrace{\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\to 1}$$

Pošto $f \in X'$, sledi da $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{t}$ postoji.

Zaključujemo da je g deo po deo neprekidna na celom intervalu $[0, \pi]$.

Iz *Propozicije 6.* znamo:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^\pi g(t) sin\left(m + \frac{1}{2}\right) t\, dt = 0,$$

odnosno:

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)\cdot \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_+)\cdot \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt\right] = 0.$$

Iz *Propozicije 3.* sledi:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_+)\cdot \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = f(x_+)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(m+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= f(x_+)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_m(t)\, dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)\cdot \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = \frac{f(x_+)}{2}.$$

Slično za T $\in [-\pi, 0)$ definišemo:

$$g(t) = \frac{f(x+t) - f(x_-)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Koristimo da f ima levi izvod u x_-. Ponovimo prethodno izvodjenje na $[-\pi, 0]$ i dobićemo:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+t) \cdot \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt = \frac{f(x_-)}{2}.$$

Konačno:

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t)\, dt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+t) D_m(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) D_m(t)\, dt \right] = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

$\square$

Sada znamo da ako funkcija zadovoljava pretpostavke Dirihleove teoreme, tada Furijeov red te funkcije konvergira u svakoj tački skupa R. Za neko $x \in R$ red konvergira ka vrednosti funkcije $f(x)$, ako je funkcija f neprekidna u tački x. U tačkama prekida red konvergira ka najboljoj vrednosti koju bismo mogli očekivati, odnosno ka srednjoj vrednosti jednostranih limesa funkcije f u toj tački.

1.2 Uniformna konvergencija

Pretpostavimo da je $f \in X'$ i neka su sa $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ označeni Furijeovi koeficijenti za funkciju f. Na osnovu Dirihleove teoreme za svako x važi:

$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \right] = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}.$$

Ovo je tačkasta konvergencija. Sada ćemo razmotriti uslove pod kojima Furijeov red funkcije f konvergira uniformno ka f. Pre toga ćemo objasniti razliku izmedju dva oblika konvergencije.

DEFINICIJA tačkaste konvergencije: Neka je $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ niz funkcija definisanih na intervalu $[a, b]$ i neka je funkcija f definisana na $[a, b]$. Kažemo da niz $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ konvergira tačkasto ka funkciji f na intervalu $[a, b]$ ako za svako x iz intervala $[a, b]$ važi:

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x),$$

tj. za svako x iz intervala $[a, b]$ i $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj $n(\varepsilon, x)$ takav da je :

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

za svako $m \geq n(\varepsilon, x)$.

DEFINICIJA uniformne konvergencije: Neka je $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ niz funkcija definisanih na intervalu $[a, b]$ i neka je funkcija f definisana na $[a, b]$. Kažemo da niz $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ konvergira uniformno ka funkciji f na intervalu $[a, b]$ ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj $n(\varepsilon)$ takav da važi:

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

za svako $m \geq n(\varepsilon)$ i za svako x iz intervala $[a, b]$.

Ove dve konvergencije izgledaju slično, ali postoji značajna razlika. Uniformna konvergencija je strožija od tačkaste konvergencije. Ako niz funkcija konvergira uniformno ka funkciji f, onda konvergira i tačkasto ka toj funkciji. Obrnuto ne mora da važi. Ova dva pojma konvergencije opisuju dva različita načina kojima se niz funkcija $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ približava funkciji f. U slučaju tačkaste konvergencije, za svako x iz intervala $[a, b]$ i svako $\varepsilon > 0$, postoji odredjeno $n(\varepsilon, x)$ koje takodje zavisi od x. Moguće je da odredjeno $n(\varepsilon, x)$ nije pogodno za ostale tačke x. Sa druge strane kod uniformne konvergencije za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $n(\varepsilon)$ koji je dobar za sve x iz intervala $[a, b]$. Posmatrajmo niz parcijalnih suma:

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

Furijeovog reda funkcije f. Ovo je konačna suma neprekidnih funkcija, prema tome S_m je neprekidna funkcija za svako $m \in N$. Dalje, znamo da je S_m 2π-periodična funkcija, pa važi $S_m(-\pi) = S_m(\pi)$ za svako $m \in N$. Prema tome, potreban uslov za uniformnu konvergenciju Furijeovog reda funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$ je da f mora biti neprekidna na $[-\pi, \pi]$ i mora da važi $f(-\pi) = f(\pi)$.

TEOREMA (o uniformnoj konvergenciji: Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$ i važi $f(-\pi) = f(\pi)$ i ako je f' deo po deo neprekidna, tj. $f' \in X$, tada Furijeov red funkcije f konvergira uniformno ka f na $[-\pi, \pi]$.

Skup funkcija koje ispunjavaju uslove prethodne teoreme označavaće se sa X'.

NAPOMENA: Ako je $f' \in X$ sledi da $f \in X'$.

Dokaz:

Neka $f' \in X$ i neka je

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx],$$

a

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx].$$

Odredimo sada vezu izmedju α_n, β_n i a_n, b_n.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Ovde smo iskoristili činjenicu da je $f(-\pi) = f(\pi)$.

Za $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \cos nx |_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \sin nx\, dx \right] \\
&= \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \\
&= nb_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \sin nx |_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cos nx\, dx \right] \\
&= -na_n
\end{aligned}$$

$\alpha_n = nb_n$, $\beta_n = -na_n$.

Za ovaj dokaz ćemo koristiti **Vajerštrasov kriterijum uniformne konvergencije** koji glasi:

Ako postoji brojni red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $c > 0$ koji konvergira i pri tome je za svako $n \in N$ i svako x iz nekog intervala I $|f_n(x)| \leq c_n$ onda funkcionalni red

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergira na I.

Znamo da važe sledeće nejednakosti:

$$|a_n \cos nx| \leq |a_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \text{ i}$$
$$|b_n \sin nx| \leq |b_n| \leq \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} \text{ ,} n \in N.$$

Dokažimo sada konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}$$

Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2)}.$$

Ranije smo dokazali da je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, pa je $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$.

Na osnovu Beselove nejednakosti dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2\right) \leq \|f'\|^2 < \infty,$$

pa je i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} < \infty$, odnosno red $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$ konvergira.

Sada sledi da brojni redovi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konvergiraju, a iz Vajerštrasove teoreme sledi da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ uniformno konvergiraju, pa i Furijeov red funkcije f uniformno konvergira. Treba još pokazati da red konvergira baš ka funkciji f.

Iz $f' \in X$ sledi da f ispunjava uslove Dirihleove teoreme, pa imamo tačkastu konvergenciju ka $f(x)$ u svakoj tački $x \in [-\pi, \pi]$. To znači da konvergira uniformno ka f na celom intervalu.$\square$

NAPOMENa:

Iz dokaza teoreme sledi da glatkost funkcije utiče na brzinu kojom a_n i b_n teže ka nuli. Dalje, iz dokaza sledi da ako su $f, f' \ldots, f^{(k-1)}$ neprekidne, 2π-periodične funkcije i ako $f^{(k)} \in X$ onda je:

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0.$$

TEOREMA: Neka je data funkcija f takva da $f, f' \in X$. Pretpostavimo da važi $-\pi < d_1 < d_2 < \cdots < d_n \leq \pi$, gde su $d_1, d_2, \ldots, d_n$ tačke prekida funkcije f na intervalu $[-\pi, \pi]$. Ako je $[a, b]$ podinterval od $[-\pi, \pi]$ koji ne sadrži ni jednu tačku prekida d_k, tada Furijeov red funkcije f konvergira uniformno ka f na $[a, b]$.

2 Parsevalova jednakost

U dosadašnjem izlaganju je predjen put od apstraktnih Hilbertovih prostora u kojima su definisani Furijeovi redovi do konktretne realizacije trigonometrijskih redova Furijea u prostoru X. U ovoj sekciji pokazujemo da je ortonormirani sistem trigonometrijskih funkcija *potpun*, čime će se zaokružiti konkretna realizacija apstraktne teorije primenjena na prostor X. Ključnu ulogu u dokazu potpunosti igra Parsevalova jednakost.

Podsetimo se, ortonormiran sistem vektora $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ je potpun ako iz $(x, e_\lambda) = 0$ za sva $\lambda \in \Lambda$ sledi $x = 0$.

PROPOZICIJA Ako za ortonormiran sistem vektora $\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ važi $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2$ onda je taj sistem potpun.

DOKAZ Neka važi $(x, e_k) = 0$, odnosno $|(x, e_k)|^2 = 0$, za sve $k \in \mathbf{N}$. Tada je $c_n := \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 = 0$, pa je

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} c_n = 0 \quad \Rightarrow \|x\| = 0 \quad \Rightarrow x = 0.$$

Jednakost iz prethodne propozicije se naziva Parsevalova jednakost. POtreban i dovoljan uslov da ona važi je

$$\lim_{m\to\infty} \|x - S_m\| = 0,$$

gde je S_m projekcija vektora x na potprostor $span\{e_1, \ldots, e_m\}$.

DOKAZ U dokazu se koriste činjenice: $(x - S_m, S_m) = 0$, za svako dato $m \in \mathbf{N}$, a to je posledica teoreme o reprezentaciji, kao i $\|S_m\|^2 =$

$\sum_{k=1}^{m} |(x, e_k)|^2$, što važi jer je sistem $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortornormiran. Na osnovu ovih činjenica sledi

$$\|x\|^2 = \|x - S_m + S_m\|^2 = \|x - S_m\|^2 + \|S_m\|^2$$

odakle je $\|x - S_m\|^2 = \|x\|^2 - \|S_m\|^2$, pa je navedeni potreban i dovoljan uslov očigledno ispunjen.

Dakle, za dokaz potpunosti trigonometrijskog sistema dovoljno je dokazati sledeću teoremu.

TEOREMA 1 (Parsevalova jednakost): Za svaku $f \in X$ važi jednakost:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \qquad (a)$$

gde su a_n i b_n Furijeovi koeficijenti od f.

Da bismo pokazali Parsevalovu jednakost dovoljno je da dokažemo da (a) važi za sve funkcije f koje zadovoljavaju uslove uniformne konvergencije. U drugoj fazi dokaza pokazaćemo da je moguće aproksimirati svaku $f \in X$ i iz toga sledi rezultat:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m(x)|^2\,dx = 0 \qquad (b)$$

Pre dokazivanja Parsevalove jednakosti dokazaćemo par pomoćnih tvrdjenja.

Tvrdjenje 1: Ako je f neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ i $f' \in X$ tada:

$$\lim_{m\to\infty} \|f - S_m\| = 0$$

gde je S_m m-ta parcijalna sumacija za Furijeov red od f.

Dokaz:

Furijeov red od f uniformno konvergira u f na intervalu $[-\pi, \pi]$. Stoga za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji $N(\varepsilon)$ tako da za svako $x \in [-\pi, \pi]$ i za svako $m \geq N(\varepsilon)$ važi:

$$|f(x) - S_m| < \varepsilon$$

Odatle za svako $m \geq N(\varepsilon)$:

$$\|f - S_m\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_m|^2 \, dx \leq 2\varepsilon^2$$

$$\text{tj. } \lim_{m \to \infty} \|f - S_m\| = 0 \square$$

Tvrdjenje 2: Neka je $f \in E$ i $\varepsilon > 0$. Postoji funkcija g koja je neprekidna na intervalu $[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$, $g' \in E$ i $\|f - g\| < \varepsilon$.

Dokaz teoreme 1 (Parsevalova jednakost): Neka je $f \in E$ i $\varepsilon > 0$. Prema *Tvrdjenju 2* postoji funkcija g koja zadovoljava uslove *Tvrdjenja 2* tako da:

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

Odatle postoji $N(\varepsilon)$ takvo da za svako $m \geq N(\varepsilon)$ važi:

$$\|g - T_m\| < \varepsilon$$

gde je T_m m-ta parcijalna sumacija za Furijeov red od g. Prema tome za $m \geq N(\varepsilon)$ imamo:

$$\|f - T_m\| \leq \|f - g\| + \|g - T_m\| < 2\varepsilon$$

Prema teoremi o projekciji tačke na vektorski potprostor sledi

$$\|f - S_m\| \leq \|f - T_m\|$$

gde je S_m m-ta parcijalna sumacija za Furijeov red od f. Prema tome za svako $m \geq N(\varepsilon)$, $\|f - S_m\| \leq 2\varepsilon$, i odavde sledi:

$$\lim_{m \to \infty} \|f - S_m\| = 0 \square$$

Tvrdjenje 3 (Uopštena Parsevalova jednakost): Za svako $f, g \in E$ važi:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx = \frac{a_0 \overline{c_0}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \overline{c_n} + b_n \overline{d_n})$$

gde su:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

$$g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n \cos nx + d_n \sin nx]$$

Tvrdjenje se dokazuje na sličan način kao i *Teorema 1. Ako uzmemo da je* $f = g$ *u ovom tvrdjenju dobijamo Parsevalovu jednakost.*$\square$

Završavamo ovu sekciju pokazujući posledice Parsevalove jednakosti. Pokazujemo da ako dve funkcije u X *imaju jednake Furijeove redove, onda su one u biti jednake. Ako su ove dve funkcije u* X' *tada je ova tvrdnja direktna posledica Dirihleove teoreme. U odnosu na funkcije koje samo pripadaju u* X*, potrebna nam je Parsevalova jednakost da pokažemo ovu tvrdnju.*

Tvrdjenje 4 (Jedinstvenost Furijeovog reda): Ako su $f, g \in X$ i ako su Furijeovi redovi od f i g jednaki, tada je $f(x) = g(x)$ osim u konačnom broju tačaka.

Dokaz: Koeficijenti Furijeovog reda $f - g \in E$ su svi jednaki nuli. Iz Parsevalove jednakosti imamo:

$$\|f - g\| = 0$$

Iz svojstva norme u posmatranom prostoru sledi da $f = g$ osim u konačnom broju tačaka. $\square$