1 Hilbertovi prostori

U Hilbertovom prostoru preko ortonomirane baze moguće je izraziti svaki element prostora kao linearnu kombinaciju vektora baze. Za početak, daćemo definicije pred-Hilbertovog i Hilbertovog prostora, ortogonalne i ortonormirane baze, kao i formulacije i dokaze nekih korisnih teorema.

Definicija 1: Neka je $\mathbb{V}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ i definisano je preslikavanje $(\cdot|\cdot) : \mathbb{V} \to \mathbb{F}$. Preslikavanje $(\cdot|\cdot)$ se naziva skalarni proizvod ako važe sledeći uslovi:

1. $(x|x) \geq 0,$ za sve $x \in \mathbb{V}$ i $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$, za sve $x, y, z \in \mathbb{V}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
3. $(x|y) = \overline{(y|x)}$ za sve $x, y \in \mathbb{V}$.

U tom slučaju uredjen par $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ se zove pred-Hilbertov prostor.

Primeri pred-Hilbertovog prostora su $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$ gde je

$$(x|y) = x_1 y_1 + \dots x_n y_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R},$$

kao i skup neprekidnih funkcija $C_{[a,b]}$ u kojem je definisan skalarni proizvod

$$(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt, \quad f, g \in \mathbb{C}[a, b].$$

Teorema 1: Ako je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ pred-Hilbertov prostor, $(\mathbb{V}, ||\cdot||)$ je normiran prostor, gde je $||x||^2 = (x|x)$, za sve $x \in \mathbb{V}$.

Dokaz: Pre svega $||x|| \geq 0$, za sve $x \in \mathbb{V}$ jer je $(x|x) \geq 0$. Takodje, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, jer je $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Važi relacija $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, za sve $x \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{F}$ jer je

$$(\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x|x) = \lambda^2 ||x||^2 \text{ te je } ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \text{ za sve } x \in \mathbb{V}, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Preostaje da se pokaže da važi (nejednakost trougla) $||x+y|| \leq ||x||+||y||$, za sve $x, y \in \mathbb{V}$.

Pretpostavimo, za trenutak, da važi Koši-Švarcova nejednakost:

$$|(x|y)| \leq ||x|| \cdot ||y||, \quad \forall x, y \in \mathbb{V}.$$

Tada je

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

pa je tvrdjenje dokazano. $\square$

Dokažimo sada Koši-Švarcovu nejednakost,

$$|(x|y)|^2 \leq ||x||^2 \cdot ||y||^2.$$

Jasno, bez umanjenja opštosti, može se pretpostaviti da je $y \neq 0$. Takodje, da bi argumentacija bila očiglednija, pretpostavimo da je skalarni proizvod definisan nad $\mathbb{R}$. Posmatra se izraz

$$\|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Ovo je kvadratna funkcija po λ sa minimalnom vrednošću u tački $\lambda_* = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$.

Jasno, iz $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$ direktno sledi da je odgovarajuća kvadratna funkcija nenegativna za sve vrednosti λ. Posebno, u tački λ_* važi

$$\langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \right)^2 \langle y, y \rangle \geq 0,$$

odakle sledi $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, odnosno $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, što je i trebalo pokazati.

U normiranom prostoru važi zakon paralelograma, gde je norma generisana skalarnim proizvodom. Zakon paralelograma je potreban i dovoljan uslov za postojanje skalarnog proizboda $(\cdot|\cdot)$ koji generiše normu $|| \cdot ||$ nad normiranim prostorom X i glasi

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big), \text{ za sve } x, y \in X.$$

Na primer, u normiranom prostoru $C[0,1]$, $\|\cdot\|_\infty$, gde je $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $f \in C[0,1]$, ne važi zakon paralelograma. Dovoljno je uočiti da on ne važi za $f(x) = x^2$ i $g(x) = 1$.

Preko skalarnog proizvoda lako se definiše ortogonalnost vektora.

Definicija 2: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot)$ pred-Hilbertov prostor i $x, y \in \mathbb{V}$. Elementi x i y su ortogonalni ako važi $(x|y) = 0$. Ako je $z \in \mathbb{V}$ tako da je $||z|| = 1$ kažemo da je z normiran element.

Za ortogonalne vektore važi $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.

Definicija 3: Kompletan pred-Hilbertov prostor je Hilbertov prostor.

Definicija 4: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot)$ Hilbertov prostor $M \subset \mathbb{V}$. Ortogonalni komplement skupa M, u oznaci $M^\perp$, je skup

$$M^\perp = \{y; y \in \mathbb{V}, (x|y) = 0, \text{ za sve } x \in M\}.$$

Skup $M^\perp$ je zatvoren podskup od $\mathbb{V}$ i važi implikacija $A \subset B \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$. Jasno, $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Podsetimo se, u metričkom prostoru (X, d) skup $A \subset X$ je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Prema tome, konvergentan niz elemenata zatvorenog skupa ima granicu u tom skupu. Ako je prostor kompletan, onda je za postojanje granice nekog niza u zatvorenom skupu dovoljno proveriti da li je dati niz Košijev. Ova činjenica se koristi u dokazima raznih teorema, kao što je, na primer, teorema o egzistenicij projekcije tačke na zatvoren potprostor.[1]

Definicija 4+: Neka je dat normiran prostor $(X, \|\cdot\|)$, tačka $x \in X$ i skup $A \subset X$. Ako postoji $a \in A$ takav da je $\|x-a\| \leq \|x-y\|$ za sve $y \in A$, onda je a projekcija tačke x na skup A. Često se koristi oznaka $P_A(x) = a$.

Teorema 3: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot)$ Hilbertov prostor i M zatvoren potprostor od $\mathbb{V}$. Tada

1. Za svaki element $x \in \mathbb{V}$ postoji jedinstvena projekcija na potprostor M.

2. Svaki element $x \in \mathbb{V}$ se na jedinstven način može predstaviti u obliku:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in M, \quad x_2 \in M^\perp$$

što označavamo sa $V = M \oplus M^\perp$.

Dokaz: Prvo tvrdjenje se dokazuje korišćenjem zakona paralelograma i kompletnosti, odnosno konstrukcije posebnog niza za koji se dokazuje da je Košijev. Dokaz izostavljamo. Neka je, sada $x \in \mathbb{V}$, $x \neq 0$, i neka je x_1 ortogonalna projekcija x na M. Ako je $x_2 = x - x_1$ i $y \in M$ takav da je$||y|| = 1$, tada iz $x_1 + (x_2|y)y \in M$ sledi

$$\begin{aligned} ||x_2||^2 = ||x - x_1||^2 \leq ||x - x_1 - (x_2|y)y||^2 &= (x_2 - (x_2|y)y|x_2 - (x_2|y)y) \\ &= ||x_2||^2 - |(x_2|y)|^2. \end{aligned}$$

[1] Podsetimo se, M je potprostor u X ako je on prostor u odnosu na restrikcije operacija iz X.

Odavde sledi $(x_2|y) = 0$ što znači da je $x_2 \in M^{\perp}$. Dakle, $x = x_1 + x_2 \in M + M^{\perp}$. Jedinstvenost je posledica jedinstvenosti projekcije. $\square$

Definicija 5: U vektorskom prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ vektor $a \in \mathbb{V}$ je linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{V}$ ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ takvi da je $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$. Kolekcija svih vektora $a \in \mathbb{V}$ takvih da je a linearna kombinacija vektora $a_1, a_2, \cdots, a_n$ označava se sa $;\;\text{span}\;\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Skup $;\;\text{span}\;\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ je potprostor od $\mathbb{V}$..

Definicija 6: U vektorskom prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ skup vektora $\{a_1, a_2, cdots, a_n\}$ je linearno nezavisan ako

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

važi samo kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Prema tome, skup vektora $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ je linearno nezavisan ako nijedan od njegovih elemenata nije linearna kombinacija preostalih elemenata tog skupa. U suprotnom kažemo da je dati skup vektora linearno zavisan, pa tada postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ od kojih je bar jedan različit od nule i važi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

Definicija 7: Skup vektora $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{V}$ ako je linearno nezavisan i ako je $;\;\text{span}\;\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \mathbb{V}$. Broj n se zove dimenzija prostora $\mathbb{V}$.

Definicija 8: Skup nenula vektora je ortogonalan ako su svaka dva vektora u tom skupu ortogonalna. Skup od jednog vektora je ortogonalan po definiciji. Ortogonalan skup vektora u kome je svaki vektor normiran[2] je ortonomiran skup.

Teorema 5: Neka je dat ortogonalan skup vektora $\{u_1, \ldots, u_n\}$ u pred-Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$. Tada je taj skup linearno nezavisan.

Dokaz: Neka je $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = \vec{0},\; a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. Za svako $k \in \{1, \cdots, n\}$ važi

$$\begin{aligned}
0 &= (\vec{0}|u_k) \\
&= (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n|u_k) \\
&= a_1(u_1|u_k) + a_2(u_2|u_k) + \cdots + a_{k-1}(u_{k-1}|u_k) + a_k(u_k|u_k) + a_{k+1}|u_k) + \cdots + a_n(u_n, u_k) \\
&= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_{k-1} \cdot 0 + a_k(u_k|u_k) + a_{k+1} \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 \\
&= a_k(u_k|u_k),
\end{aligned}$$

[2]Vektor $x \in \mathbb{V}$ je normiran ako je $\|x\| = 1$.

odakle sledi da je $a_k = 0$. Kako to važi za svako $k \in \{1, \ldots, n\}$, sledi da je skup $\{u_1, \ldots u_n\}$ linearno nezavisan.

Svaki konačan skup linearno nezavisnih nenula vetora može se prevesti u ortonomiran skup. Dokaz za to je dat u sledećoj teoremi.

Teorema Gram-Schmidt: Svaki konačno dimenzionalan pred-Hilbertov prostor ima ortonomiranu bazu.

Dokaz: Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ linearno nezavisan skup vektora koji je baza za pred-Hilbertov prostor $\mathbb{V}(\mathbb{F})$. Sledećim postupkom, koji se zove Gram - Šmitov postupak orogonalizacije prevešćemo tu bazu u novu bazu $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ koja je ortogonalna, a zatim ćemo te vektore normirati.

U prvom koraku, uzima se da je $b_1 = a_1$. Pošto je skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ skup nenula vektora, sledi $b_1 \neq \vec{0}$ i skup $\{b_1\}$ je ortogonalan po definiciji.

Vektor b_2 dobijamo na sledeći način:

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2|b_1)}{(b_1|b_1)} b_1.$$

Sledi $b_2 \neq \vec{0}$ jer su a_1 i a_2 linearno nezavisni. Pokazaćemo da su b_1 i b_2 ortogonalni.

$$(b_2|b_1) = (a_2|b_1) - \frac{(a_2|b_1)}{(b_1|b_1)}(b_1|b_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 \perp b_1.$$

Vektor b_3 dobija se po analogiji:

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3|b_1)}{(b_1|b_1)} b_1 - \frac{(a_3|b_2)}{(b_2|b_2)} b_2.$$

Očigledno, $b_3 \neq \vec{0}$ jer je koeficijent uz a_3 jednak sa 1, pa bi, u suprotnom (kada bi b_3 bio nula vektor) a_3 bio linearno zavisan od a_1 i a_2.

Ortogonalnost vektora b_3 i b_2 sledi iz

$$(b_3|b_2) = (a_3|b_2) - \frac{(a_3|b_1)}{(b_1|b_1)}(b_1|b_2) - \frac{(a_3|b_2)}{(b_2|b_2)}(b_2|b_2) = 0.$$

Na isti način se pokazuje da je $b_3 \perp b_1$.

Dakle, opšte rekurentno pravilo za ovaj postupak je

$$b_1 = a_1, \quad b_{k+1} = a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(a_{k+1}|b_i)}{(b_i|b_i)} b_i, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Ovim postupkom dobija se ortogonalna baza. Da bi vektori bili normirani, potrebno je svakog od njih podeliti sa svojom normom. Dakle, sa

$$e_1 = \frac{b_1}{||b_1||}, e_2 = \frac{b_2}{||b_2||}, \dots, e_n = \frac{b_n}{||b_n||}.$$

dobija se ortonomirana baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Primer: U prostoru polinoma stepena manjeg od ili jednakog sa 2, $\mathcal{P}_2(x)$ sa unutrašnjim proizvodom $(p|q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx, \quad p, q \in \mathbb{R}_3\Big[x\Big]$ datu bazu $\{1, x, x^2\}$ Gram-Šmitovim postupkom prevesti u ortogonalnu bazu.

Rešenje:

$$b_1 = 1,$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2|b_1)}{(b_1|b_1)} b_1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\, dx}{\int_{-1}^{1} dx} \cdot 1 = x,$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3|b_1)}{(b_1|b_1)} b_1 - \frac{(a_3|b_2)}{(b_2|b_2)} b_2 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\, dx}{\int_{-1} 1dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\, dx}{\int_{-1} 1x^2\, dx} \cdot x = x^2 - \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1+1} = x^2 - \frac{1}{3},$$

pa je $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ je tražena ortogonalna baza. $\square$

Potpun ortonomiran sistem

Definicija 9: Skup vektora $S = \{s_i; i \in I\}$ u pred-Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$ je ortornomiran sistem ako je za sve $i, j \in I$

$$(s_i|s_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Ortonomiran sistem uvek postoji jer ako je $s \neq \vec{0} \in \mathbb{V}$ onda je $S = \left\{\frac{s}{||s||}\right\}$ ortonormiran sistem u $(\mathbb{V}, (\cdot|\cdot))$.

Kao što smo videli, Gram-Schimdt-ovim postupkom od proizvoljnog skupa linearno nezavisnih vektora, lako možemo dobiti ortonomiran skup vektora. Prema tome, bilo koji sistem linearno nezavisnih vektora automatski možemo smatrati i ortonormiranim sistemom.

Postupak ortogonalizacije je, u suštini, primena teoreme o dekompoziciji Hilbertovog prostora $H = X \oplus X^{\perp}$, za razne potprostore X. Evo zašto.

Podsetimo se, vektor s_1 normalizujemo, i dobijamo $\overline{s_1} = \frac{s_1}{||s_1||}$. Neka je sada $X_1 = span\left\{\overline{s_1}\right\}$, odnosno neka je potprostor X_1 generisan vektorom $\overline{s_1}$.

Zatim, za $s_2 \notin X_1$ znamo da je $s_2 = s_2^{'} + s_2^{''}$, gde je $s_2^{''}$ projekcija s_2 na potprostor X_1, a $s_2^{'}$ pripada potprostoru $X_1^{\perp}$.

Od ranije znamo da važi $s_2^{''} = (s_2, \overline{s_1})\overline{s_1}$, pa prema tome i $s_2^{'} = s_2 - (s_2, \overline{s_1})\overline{s_1}$. Iz ovoga se jasno vidi, da smo razložili prostor na direktnu sumu potprostora. Posle toga nam preostaje samo normalizacija, tj.:

$$\overline{s_2} := \frac{s_2^{''}}{||s_2^{'}||}.$$

Tako se dobija potprostor $X_2 = \text{ span } \{\overline{s_1}, \overline{s_2}\}$, generisan ortonormiranom bazom.

Jasno, za $s_3 \notin X_2$ potupak nastavljamo.....

Teorema: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot))$ pred-Hilbertov prostor i neka je dat ortonormiran skup vektora $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Ako je vektor u definisan na sledeći način

$$u = \sum_{k=1}^{n} a_k, e_k,$$

tada za koeficijente a_k važi $a_k = (u, e_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$

Dokaz: Dokaz se izvodi iz definicije ortonormiranog sistema i unutrašnjeg proizvoda:

$$(u, e_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k (e_k, e_k) = a_k (e_k, e_k) = a_k$$

$\square$

Posledica: Kao posledicu ove kratke teoreme dobijamo da u bilo kom potprostoru W, koji je generisan ortonormiranom bazom $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $W = \text{ span } \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, proizvoljan vektor u možemo predstaviti u sledećem obliku:

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k.$$

Propozicija: Neka je $(\mathbb{V}, (\circ, \circ))$ pred-Hilbertov prostor i neka je skup vektora $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sistem ortonormiranih vektora. Dalje, neka su $\{a_k\}, \{b_k\}$ $k =$

$1, 2, \ldots, n$ proizvoljni nizovi skalara. Tada važi sledeće:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \sum_{k=1}^{n} b_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k},$$

odnosno, za proizvoljne $u, v \in$ span $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ važi

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k)\overline{(v, e_k)}.$$

Dokaz: Dokaz sledi direktno iz odgovarajućih definicija. Predstavimo Vektore u i v na sledeći način

$$u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \text{ i } v = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$$

Napravimo sada proizvod ova dva vektora

$$(u, v) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Odavde primenom prethodne teoreme dobijamo ono što smo i tvrdili, odnosno

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k)\overline{(v, e_k)}.$$

□

Ortogonalne projekcije

Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot, \cdot))$ pred-Hilbertov prostor, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sistem ortonormiranih vektora i neka je $W = span\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Zanima nas projekcija proizvoljnog vektora $u \in \mathbb{V}$ na potprostor W. Evo šta znamo za sada, u slučaju Hilbertovog prostora: $\exists \overline{u} \in W$, tako da važi $\|u - \overline{u}\| \leq \|u - x\|, \forall x \in W$. Takodje, $u = \overline{u} + (u - \overline{u})$, pri čemu $u - \overline{u} \in W^{\perp}$.

Propozicija: Neka je pod gore navedenim uslovima $\overline{u} = \sum_{k=1}^{n} (u, e_k) e_k$, gde je $u \in H$. Tada važi:

(i) $$(u - \overline{u}, w) = 0, \forall w \in W,$$

(ii) $$\|u-w\|^2 = \|u-\overline{u}\|^2 + \|\overline{u}-w\|^2, \forall w \in W,$$

(iii) $\overline{u}$ je projekcija tačke u na potprostor W.

Dokaz:

(i) $$(u-\overline{u}, w) \stackrel{?}{=} 0$$

Posmatrajmo prvo:

$$(u-\bar{u}, e_1) = \left(u - \sum_{k=1}^{n}(u, e_k)e_k, e_1\right) = (u, e_1) - \left(\sum_{k=1}^{n}(u, e_k)e_k, e_1\right) =$$

$$= (u, e_1) - \sum_{k=1}^{n}(u, e_k)(e_k, e_1) = (u, e_1) - (u, e_1)(e_1, e_1) = 0$$

Analogno radimo za sve ostale $e_k, k = 1, 2, ..., n$. Znamo da za proizvoljno $w \in W$ postoje koeficijenti $a_k = (w, e_k)$ takvi da je $w = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n$. Sada napravimo proizvod

$$(u-\overline{u}, w) = \left(u-\overline{u}, \sum_{k=1}^{n} a_ke_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k(u-\overline{u}, e_k) = 0.$$

(ii) $\|u-w\|^2 = \|u-\overline{u}+\overline{u}-w\|^2 = (u-\overline{u}+\overline{u}-w, u-\overline{u}+\overline{u}-w) =$

$$\|u-\overline{u}\|^2 + (u-\overline{u}, \overline{u}) - (u-\overline{u}, w) + (\overline{u}, u-\overline{u}) - (w, u-\overline{u}) + \|\overline{u}-w\|^2 =$$
$$\|u-\overline{u}\|^2 + \|\overline{u}-w\|^2$$

(iii) Sledi direktno iz tačke (ii).

Primedba: Egzistencija projekcije na potprostor je dokazana ranije za Hilbertov prostor. Na osnovu prethodne propoaicije, sledi da je dovoljno pretpostaviti da je prostor pred-Hilbertov.

Definicija: Ortonormiran sistem $S = \{s_k, k \in \aleph\}$ je potpun u Hilbertovom prostoru $(\mathbb{V}, (\cdot,\cdot))$ akko za proizvoljan ortonormiran sistem $\overline{S}$ važi:

$$S \subset \overline{S} \Rightarrow S = \overline{S}.$$

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza.

Teorema: U proizvoljnom pred−Hilbertovom prostoru postoji potpun ortonormiran sistem.

Sledi teorema koja daje potreban i dovoljan uslov za potpunost ortonormiranog sistema.

Teorema: Neka je $(\mathbb{V}, (\cdot,\cdot))$ pred−Hilbertov prostor. Tada je skup $S = \{s_k, k \in \aleph\}$ potpun ortonormiran sistem akko za svaki element pred−Hilbertovog prostora H važi:

$$(x, s_k) = 0, \forall k \in \aleph \Rightarrow x = 0.$$

Definicija: Prostor je separabilan, ako sadrži prebrojiv gust podskup. Skup A je gust podskup skupa B akko važi $\overline{A} = B$, gde je $\overline{A} = A \cup$ {tačke nagomilavanja skupa A}

Primer: Skup racionalnih brojeva je prebrojiv gust podskup skupa realnih brojeva.

Definicija: Ako je pred−Hilbertov prostor separabilan, tada je svaki njegov potpun ortonormiran sistem najviše prebrojiv.[3]

Primer: Pokažimo da je na skupu $C[0, 2\pi]$, sa standardnim unutrašnjim proizvodom definisanim na sledeći način $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, sistem $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right\}$ ortonormiran sistem.

Prvo pokazujemo ortogonalnost:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \cos 2x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \sin 2x|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-\cos x|_0^{2\pi}) = 0,$$

$$\left(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cos 2x dx = 0.$$

Zato pokazujemo normiranost:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx = 1,$$

[3] Skup je najviše prebrojiv ako je konačan ili ako je prebrojiv. U slučaju da je potpun ortonormiran sistem prebrojiv, to znači da sve njegove elemente možemo indeksirati skupom prirodnih brojeva.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2x}{\pi} dx = \frac{1}{pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 4x dx = 1,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = 1.$$

1.1 Furijeovi koeficijenti

Definicija: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred$-$Hilbertov prostor, $x \in V$ i $E = \{e_a; \alpha \in \Lambda\}$ potpun ortonormiran sistem. Brojevi $x_\alpha = (x|e_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$ iz polja F su ***Furijeovi koeficijenti***.

Lema 1: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred$-$Hilbertov prostor i $\{x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, ..., x_{\alpha k}\}$ proizvoljan konačan skup Furijeovih koeficijenata za $x = V$.Tada je:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{\alpha i}|^2 \leq \|x\|^2$$

Dokaz: Kako je $0 \leq (z|z)$, za svako $z \in V$, ako je $z = x - \sum\limits_{i=1}^{k} x_{\alpha i} e_{\alpha i}$, sledi da je:

$$0 \leq \left(x - \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} e_{\alpha i} | x - \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} e_{\alpha i} \right)$$

$$= (x|x) - \sum_{i=1}^{k} \overline{x_{\alpha i}} (x|e_{\alpha i}) - \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} (e_{\alpha i}|x) + \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} \overline{x_{\alpha i}}$$

Odavde sledi:

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \overline{x_{\alpha i}} (x|e_{\alpha i}) - \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} (e_{\alpha i}|x) + \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} \overline{x_{\alpha i}}$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \overline{x_{\alpha i}} x_{\alpha i} - \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} \overline{x_{\alpha i}} + \sum_{i=1}^{k} x_{\alpha i} \overline{x_{\alpha i}}$$

te je:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_{\alpha i}|^2 \leq \|x\|^2$$

Na osnovu *leme 1* sledi da za proizvoljan prebrojiv skup Furijeovih koeficijenata $\{x_i; i \in I\}$ elemenata $x \in V$ red $\sum_{i \in I} |x_i|^2$ apsolutno i bezuslovno konvergira. Primenom *leme 1*, dokazuje se sledeća teoremu.

Teorema 1: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred$-$Hilbertov prostor. Tada je skup Furijeovih koeficijenata $\{x_\alpha; \alpha \in \Lambda, x_\alpha \neq 0\}$ za $x \in V$ najviše ***prebrojiv***.

Teorema 2: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred$-$Hilbertov prostor. Ako je $\{x_{\alpha i}; i \in N\}$ skup Furijeovih koeficijenata za $x \in V$ koji su različiti od nule, tada je:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha i}|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1}$$

Teorema 3: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ pred$-$Hilbertov prostor i neka je $x_{\alpha i}; i \in N$ skup Furijevih koeficijenata za $x \in V$ koji su različiti od nule. Neka je $\{x_{sv}\}_{v \in N}$ **podniz** niza $\{x_{\alpha i}\}_{i \in N}$. Tada je niz $\{y_n\}_{n \in N}$:

$$y_n = \sum_{v=1}^{n} x_{sv} e_{sv}, (n \in N)$$

Košijev niz u V.

Teorema 4: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ Hilbertov prostor, $S = \{e_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ kompletan ortogonalan sistem i $x \in V$. Tada je:

$$x = \sum_{i \in I_x} x_i e_i,$$

gde je $x_i = (x|e_i)$, $i \in I_x$.

Skalarni proizvod $(x|y)$ se u Hilbertovom prostoru $(V, (\cdot|\cdot))$ može izraziti preko Furijeovih koeficijenata elemenata x i y.

Teorema 5: Neka je $(V, (\cdot|\cdot))$ Hilbertov prostor i $x, y \in V$ tako da je:

$$x = \sum_{i \in I_x} x_i e_i, y = \sum_{i \in I_y} y_i e_i,$$

Tada je:

$$(x|y) = \sum_{i \in \Lambda_1} x_i \overline{y}_i$$

gde je $\Lambda_1 = I_x \cup I_x$.

Trigonometrijski sistem $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ je jedan ortogonalan sistem funkcija u pred-Hilbertovom prostoru (po delovima) neprekidih funkcija nad $[-\pi, \pi]$ sa skalarnim proizvodom $(f|g) = \int_{-pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.