1 Metrički i normirani prostori

U matematici, metrički prostor je skup u kome je definisan pojam rastojanja izmedju njegovih elemenata. Metrički prostor koji najbliže odgovara našem intuitivnom shvatanju prostora je 3-dimenzionalni Euklidov prostor. Euklidska metrika ovog prostora definiše rastojanje izmedju dve tačke kao dužinu prave linije koja ih povezuje. U opštem slučaju, geometrija prostora zavisi od izabrane metrike.

Koncept metričkog prostora je uveo francuski matematičar Maurice Fréchet[1] 1906. godine.

DEFINICIJA 1. *Metrički prostor* je uredjeni par (X, d) gde je X neprazan skup, a d preslikavanje $d : X \times X \to [0, \infty)$ za koje važe sledeći uslovi:

1. za sve $x, y \in X$ važi $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. za sve $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(y, x)$ [simetričnost];
3. za sve $x, y, z \in X$ važi $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [nejednakost trougla].

Preslikavanje d se naziva *metrika na skupu* X, a broj $d(x, y)$ je *rastojanje tačaka* x i y.

PRIMERI:

1. $(\mathbb{R}, d)$ je metrički prostor gde je rastojanje d definisano na sledeći uobičajeni način:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2. $(\mathbb{R}^2, d)$ je metrički prostor sa metrikom d definisanom na sledeći način:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

gde je $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$.

[1] Maurice Fréchet (1878-1973)

3. Uopšteno, za $p \geq 1$, $(\mathbb{R}^n, d_p)$ je metrički prostor u kojem je metrika d definisana na sledeći način:

$$d_p(x,y) = \Big[\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \Big]^{\frac{1}{p}} \text{ ili } d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|,$$

pri čemu je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4. Neka je $C_{[a,b]}$ skup neprekidnih, realnih funkcija definisanih nad intervalom $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Za $f, g \in C_{[a,b]}$ definišemo d na sledeći način:

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} \Big| f(x) - g(x) \Big|. \tag{1}$$

Dokazati da je $(C_{[a,b]}, d)$ metrički prostor.

Dokaz: Očigledno važe osobine 1. i 2. za d iz definicije 1. Preostaje da se proveri da li važi i nejednakost trougla. Neka su $f, g, h \in C_{[a,b]}$. Za svako $x \in [a,b]$ važi:

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Odavde sledi:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq \max_{x \in [a,b]} (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) && (2) \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)|. && (3) \end{aligned}$$

Na osnovu jednakosti (1) sledi $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, što je i trebalo da se dokaže. $\square$

KOMENTAR. U praksi se često dešava da se u uslovu $d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$ podrazumeva da je $x = y$ ako ne možemo da razlikujemo x od y, pri čemu se može desiti da x nije jednak sa y, ali da razliku tih elemenata nije moguće uočiti ili da ta razlika nije bitna za dalji rad. Na primer, pri računanju brojem π u računarima podrazumeva se da je taj broj predstavljen izvesnim brojem sigurnih cifara. Slično, funkcije, to jest signali, se identifikuju ako su jednake "skoro svuda", odnosno ako se razlikuju u konačno mnogo (čak i u prebrojivo mnogo) tačaka.

Topologija metričkog prostora

DEFINICIJA 2: Neka je (X, d) metrički prostor, $a \in X$ i $r > 0$. Skup

$$L(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

je *otvorena lopta* u metričkom prostoru (X, d) sa centrom u tački a i sa poluprečnikom r.

LEMA 1: Neka je $L(x_0, r)$ proizvoljna otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d). Tada važi:

$$(\forall x \in L(x_0, r))(\exists \varepsilon = \varepsilon_x > 0)(L(x, \varepsilon) \subset L(x_0, r)).$$

Dokaz: Treba pokazati za za neku proizvoljnu tačku $y \in L(x, \varepsilon)$ važi i $y \in L(x_0, x)$. Tražimo ε koje zadovoljava tu relaciju. Neka je $x \in L(x_0, r)$ i neka je $\varepsilon := r - d(x_0, x)$. Iz $y \in L(x, \varepsilon)$ znamo da je $d(x, y) < \varepsilon$. Sledi

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < r - \varepsilon + \varepsilon = r,$$

odnosno $y \in L(x_0, r)$. $\square$

DEFINICIJA 3: Za neprazan skup $A \subset X$ kažemo da je *otvoren* u metričkom prostoru (X, d) ako za svako $a \in A$ postoji $\varepsilon > 0$ tako da važi $L(a, \varepsilon) \subset A$. Po definiciji je prazan skup, $\emptyset$, otvoren skup.

Na snovu leme 1 i definicije 3, možemo zaključiti da je otvorena lopta otvoren skup u metričkom prostoru.

DEFINICIJA 4: Familiju τ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zovemo *topološka struktura* ili *topologija metričkog prostora (X,d).* Za topologiju τ kažemo da je definisana metrikom d.

Očigledno je da važi $\emptyset \in \tau$ i $X \in \tau$. Takodje važi da je unija svake familije elemenata iz τ element iz τ i da je presek konačno mnogo elemenata iz τ elementi iz τ.

Skup $L(a, \varepsilon)$ se često zove ε okolina tačke a.

DEFINICIJA 5: Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je *zatvoren* ako je njegov komplement $C(A) = A^C = X \setminus A$ otvoren skup.

Očigledno je da su $\emptyset$ i X zatvoreni skupovi.

KOMENTAR. Topološka struktura se može definisati nezavisno od metrike, u smislu da postoje topološki prostori u kojima nije moguće definisati metriku.

Konvergencija niza u metričkom prostoru

Osnovno svojstvo metričkih prostora koje je značajno u primenama je mogućnost definisanja konvergentnog niza.

DEFINICIJA 6: U metričkom prostoru (X, d) kažemo da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ *konvergira* ka tački $a \in X$, što označavamo sa $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, ako važi $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Umesto oznake $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ upotrebljava se i oznaka $a_n \to a, n \to \infty$.

Iz definicije 6 sledi da niz $\{a_n\}_{n\in N}$ konvergira ka $a \in X$ ako

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall n > n_0(\varepsilon) \Longrightarrow a_n \in L(a, \varepsilon)).$$

Broj $n_0(\varepsilon)$ zavisi od ε i pokazuje koliko se članova niza $\{a_n\}_{n\in N}$ nalazi izvan lopte sa centrom u a i sa poluprečnikom ε. Drugim rečima, počev od $n_0(\varepsilon)$, svi članovi niza sa indeksom većim od n_0 se nalaze $L(a, \varepsilon)$.

TEOREMA 1: Ako niz $\{a_n\} \subset X$ konvergira u metričkom prostoru (X, d), tada je granična vrednost niza jednoznačno odredjena.

Dokaz: Neka je dat niz $\{a_n\}_{n\in N}$. Pretpostavimo da važi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ gde je $a \neq b$, odnosno $d(a, b) > 0$. Biramo proizvoljno $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = \frac{d(a,b)}{3}$. Tada važi

$$(\exists n_a(\varepsilon))(\forall n > n_a)(d(a_n, a) < \varepsilon) \quad \text{i} \quad (\exists n_b(\varepsilon))(\forall n > n_b)(d(a_n, b) < \varepsilon).$$

Neka je $n_0 = \max(n_a, n_b)$. Za $\forall n > n_0$ važi

$$d(a, b) \leq d(a, a_n) + d(b, a_n) < \frac{d(a, b)}{3} + \frac{d(a, b)}{3} = \frac{2}{3} d(a, b),$$

što je kontradikcija. $\square$

Granična vrednost funkcije u metričkom prostoru

Neka je dat metrički prostor (X, d) i skup $A \subset X$. Tačka a je *tačka nagomilavanja skupa* A ako važi

$$(\forall\varepsilon > 0)((L(a, \varepsilon) \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

TEOREMA 2: Neka je (X, d) metrički prostor, $A \subset X$ i a tačka nagomilavanja skupa A. Tada postoji niz $\{a_n\}_{n\in N}$ u A takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

DEFINICIJA 7: Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori, $f : X_1 \to X_2, A \subset X_1$ i $a \in X_1$ tačka nagomilavanja skupa A. Kažemo da je $b \in X_2$, *granična vrednost funkcije f, kada x teži ka a* i $x \in A$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da je

$$f((L^{d_1}(a, \delta(\varepsilon)) \bigcap A) \setminus \{a\}) \subset L^{d_2}(b, \varepsilon).$$

Ako je $b \in X_2$ granična vrednost funkcije f, kad x teži ka a i $x \in A$ pišemo:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b.$$

Dakle, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = b$ ako i samo ako važi uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in A)(0 < d_1(x, a) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_2(f(x), b) < \varepsilon).$$

TEOREMA 3: Granična vrednost $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, ako postoji, je jednistvena.

Kompletnost metričkog prostora

DEFINICIJA 8: Neka je (X, d) metrički prostor. Niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je *Košijev* ako važi sledeći uslov:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon),$$

odnosno, u ekvivalentnom obliku:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon)$$

TEOREMA 4: Ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u X konvergentan onda je i Košijev.

Dokaz: Neka je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan. Tada je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, odnosno:

$$(4) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$$

Primenjujući (4) za $\frac{\varepsilon}{2}$ dobijamo da je

$$(5) \qquad d(x_n, x) < \varepsilon \text{ za sve } n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Iz (5) sledi da za sve $m, n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = n_0^{'}(\varepsilon)$ važi

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prema definiciji 8 sledi da je niz $\{x_n\}_{n \in N}$ Košijev. $\Box$

TEOREMA 5: Ako je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev u X i ima konvergentan podniz, tada je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz.

DEFINICIJA 9: Metrički prostor $(\mathbb{R}, d)$ je *kompletan* ukoliko u njemu svaki Košijev niz konvergira, odnosno ako za svaki Košijev niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ u X postoji $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in \mathbb{N}$.

PRIMERI:

1. Metrički prostor $(\mathbb{R}, d)$, gde je $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, je kompletan.

2. Metrički prostor $(\mathbb{Q}, d)$, gde je $d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, nije kompletan.

3. Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $f : X \to \mathbb{R}$ takvo preslikavanje da je f neprekidna i ograničena funkcija na X. Označimo sa $C_b(X)$ skup svih ograničenih i neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$. Metrika d u $C_b(X)$ je definisana na sledići način:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C_b(X)$$

Metrički prostor $(C_b(X), d)$ je kompletan.

4. $(C_{[a,b]}, d_1)$ gde je metrika d_1 definisana sa

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \qquad \text{za sve} \quad f, g \in C_{[a,b]}$$

nije kompletan metrički prostor.

KOMENTAR. Ukoliko dati metričko prostor nije kompletan, moguće je proširiti ga tako da se dobije kompletan metrički prostor, odnosno moguće je kompletirati ga. Kompletiranje metričkog prostora $(\mathbb{Q}, d)$ je jedna od mogućih konstrukcija modela strukture realnih brojeva.

Dokaz da $(C([a, b]), d_1)$ *nije kompletan.* Bez umanjenja opštosti, može se pretpostaviti da je $[a, b] = [-1, 1]$. Neka je $f_n \in [-1, 1]$ definisan sa

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Lako je uočiti da važi

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} = \operatorname{sgn} x,$$

pa granica niza ima prekid u $x = 0$, odnosno, granica niza ne pripada prostoru $C([-1, 1])$. Niz $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dakle, ne konvergira u $C([-1, 1])$.

Pokazaćemo da je niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev, odnosno da važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in N)(\forall m, n \in N)(m, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f_m, f_n) < \varepsilon).$$

Pretpostavimo da je $m > n$ (pa je $1/n > 1/m$). Tada važi:

$$\begin{aligned}
d_1(f_n, f_m) &= 2\int_0^1 \Big(f_m(x) - f_n(x)\Big)dx = 2\Big(\int_0^{\frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1}\Big) \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{m}} (mx - nx)dx + 2\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nx)dx \\
&= 2|m-n| \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{m}} + 2\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big) - 2n\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{m-n}{n^2} + 2\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big) - n\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\Big) \\
&= \frac{1}{m} - \frac{n}{m^2} + \frac{2}{n} - \frac{2}{m} - \frac{1}{n} + \frac{n}{m^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Za dato $\varepsilon > 0$ biramo $n_0(\varepsilon)$ tako da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, odnosno $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Tada važi da je $d_1(f_n, f_m) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, odnosno niz je Košijev. $\Box$

Neprekidna funkcija u metričkom prostoru

DEFINICIJA 10: Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori, $f : X_1 \to X_2, x_0 \in X_1$ i $f(x_0) = y_0$. Funkcija f je neprekidna u tački x_0 ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)(f(\mathbb{L}^{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))) \subset \mathbb{L}^{d_2}(y_0, \varepsilon)). \qquad (\blacklozenge)$$

Odnosno, funkcija $f : X_1 \to X_2$ je neprekidna u tački $x_0 \in X_1$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da za svako $x \in X_1$ važi implikacija:

$$d_1(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

DEFINICIJA 11: Neka je (X, d) metrički prostor. Tačka $a \in X$ je *izolovana tačka* ako postoji $\delta > 0$ tako da je:

$$\mathbb{L}^d(a, \delta) \bigcap X = \{a\}.$$

Funkcija $f : X_1 \to X_2$ je neprekidna u svakoj izolovanoj tački $x_0 \in X_1$ jer je

$$f(\mathbb{L}^{d_1}(x_0, \delta)) = f(x_0) \in \mathbb{L}^{d_2}(f(x_0), \varepsilon)$$

za svako $\varepsilon > 0$ i svako $\delta > 0$ za koje je $\mathbb{L}^{d_1}(x_0, \delta) \bigcap X_1 = \{x_0\}$.

Iz definicije granične vrednosti funkcije f sledi:

$$f \textit{ je neprekidna u neizolovanoj tački } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ako je funkcija $f : X_1 \to X_2$ neprekidna u svakoj tački $x \in X_1$ kaže se da je *neprekidna nad* X_1.

Normiran prostor

U klasi metričkih prostora su veoma značajni normirani prostori, koji pored topološke imaju i vektorsku strukturu.

Osnovni pojmovi i osobine

DEFINICIJA 12: X je *vektorski prostor* nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ako je $(X, +)$ Abelova grupa u kojoj je definisano množenje vektora skalarom $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x, (\alpha \in \mathbb{F}, x \in X)$ tako da važe sledeći uslovi:

1° $1 \cdot x = x$

2° $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

3° $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

4° $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

za $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, x, y \in X$.

DEFINICIJA 13: Neka je $v : X \to [0, \infty)$ tako da važe sledeći uslovi:

1° $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2° $v(\lambda x) = |\lambda| v(x), \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in X$

3° $v(x + y) \leq v(x) + v(y), \forall x, y \in X$

Tada kažemo da je preslikavanje v *norma nad* X, a uredjen par (X, v) je *normiran prostor*.

Normu v ćemo u daljem tekstu obeležavati sa $|| \cdot ||$ ili $|| \cdot ||_X$.

PRIMERI:

1° $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_p)$ je normiran prostor ako je norma $|| \cdot ||_p$, gde je $p \geq 1$, definisana na sledeći način:

$$||x||_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ gde je } x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

2° $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ je normiran prostor ako je norma $||\cdot||_\infty$ definisana na sledeći način:

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \text{ gde je } x = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

3° Neka je $l^p (p \geq 1)$ vektorski prostor nizova iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ definisana na sledeći način:

$$l^p = \Big\{ x \mid x = (x_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \textit{ je konvergentan red} \Big\}.$$

Ako je norma u l^p definisana kao:

$$||(x_n)||_{l^p} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ za sve } x = (x_n) \in l^p$$

tada je $(l^p, || \cdot ||_{l^p})$ normiran prostor.

4° Prostor $C([a,b])$ neprekidnih realnih funkcija nad intervalom $[a,b]$ je normiran prostor ako je norma u $C([a,b])$ definisana na sledeći način:

$$||f||_{C_{[a,b]}} = \max_{x\in[a,b]} \Big|f(x)\Big|, \quad f \in C_{[a,b]}.$$

Odnos norme i metrike

Svaki normirani prostor $(X, ||\cdot||)$ je i metrički prostor (X, d) sa metrikom d koja je definisana na sledeći način:

$$d(x,y) = ||x-y||, \text{ za sve } x, y \in X$$

Dokaz: Proverićemo da d ima sledeće osobine:

1° $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2° $d(x,y) = d(y,x),$ za sve $x, y, z \in X$

3° $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z),$ za sve $x, y, z \in X$

1° : Sledi iz ekvivalencija:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow ||x-y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

2° : Kako je $||x-y|| = ||(-1)(y-x)|| = |-1|||y-x|| = ||y-x||$ sledi da je $d(x,y) = d(y,x)$ za sve $x, y \in X$.

3° : $d(x,z) = ||x-z|| = ||x-y+y-z|| \le ||x-y|| + ||y-z|| = d(x,y) + d(y,z)$ za sve $x, y, z \in X$. □

Banahov prostor

DEFINICIJA 14: Ako je normiran prostor $(X, ||\cdot||)$ kompletan metrički prostor onda ga nazivamo *Banahov prostor.*

Prostori $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty), (l^p, ||\cdot||_{l^p})$ su Banahovi prostori.

TEOREMA 8: Neka je $(X, ||\cdot||)$ normiran prostor. Tada su operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom neprekidne.

DEFINICIJA 15: U normiranom prostoru $(X, ||\cdot||)$ se može definisati *konvergentan red* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$, gde je $y_i \in X$, za svako $i \in \mathbb{N}$. Kažemo da je red

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ konvergentan i $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ ako je $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$. Red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$ je *apsolutno konvergentan* ako je red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||y_i||$ konvergentan.

Zbir $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ se zove $n-$ta parcijalna suma reda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$, pa je red konvergentan ako i samo ako je konvergntan niz njegovih parcijalnih suma.

TEOREMA 9: Normiran prostor $(X, ||\cdot||)$ je Banahov ako i samo ako je svaki apsolutno konvergentan red i konvergentan.

Dokaz:

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je $(X, ||\cdot||)$ Banahov prostor i neka je red $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergentan. Treba da dokažemo da $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, niz njegovih parcijalnih suma konvergira. Pošto je $(X, ||\cdot||)$ Banahov prostor, dovoljno je pokazati da je $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev niz. Posmatrajmo stoga

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{k=n}^{n+p} x_k.$$

Iz nejednakosti $\left|\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k\right|\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p} ||x_k||$ za sve $n, p \in \mathbb{N}$, i apsolutne konvergencija posmatranog reda sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n \geq n_0$ i za sve $p \in \mathbb{N}$ važi

$$d(s_{n+p}, s_n) = \|s_{n+p} - s_n\| < \varepsilon,$$

odnosno niz $\left\{\sum\limits_{k=1}^{m} x_k\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ je Košijev što je i trebalo da sedokaže.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev niz u X. Dokazaćemo da niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz, pa je i čitav niz konvergentan jer je Košijev.

Pošto je niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev, birajući $\varepsilon = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}$, dobijamo podniz $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ takav da je:

$$||x_{n_j} - x_{n_{j+1}}|| < 2^{-j}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

pri čemu je $n_j < n_{j+1}$.

Iz uslova (6) sledi da red $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(x_{n_j} - x_{n(j+1)})$ apsolutno konvergira jer je

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||x_{n_j} - x_{n(j+1)}|| < \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1.$$

Na onovu pretpostavke da je svaki apsolutno konvergentan red i konvergentan, sledi da red $\sum_{j=1}^{\infty}\left(x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\right)$ konvergira, što znači da postoji

$$\lim_{m\to\infty}\big((x_{n_1} - x_{n_2}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \cdots + (x_{n_{m-1}} - x_{n_m})\big)$$

$$= \lim_{m\to\infty}(x_{n_1} - x_{n_m}) = x_{n_1} - \lim_{m\to\infty} x_{n_m}.$$

Odavde sledi da je podniz $\{x_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Kako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev niz koji sadrži konvergentan podniz, sledi da je i čitav niz konvergentan, te je $(X, ||\cdot||)$ Banahov prostor. $\square$