1 Trigonometrijski redovi Furijea za funkcije sa periodom 2π

Izračunavanje pomoćnih integrala.

Posmatrajmo sledeće integrale:

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx,\end{array}\right\} n\text{-ceo pozitivan broj;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx,\\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx,\end{array}\right\} m,n \text{ - celi pozitivni brojevi.}$$

Važi:

(1) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx = \left\{\begin{array}{rl} -\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n\neq 0),\\ x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi & (n=0);\end{array}\right.$$

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx = \left\{\begin{array}{rl} -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n\neq 0),\\ 0\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 & (n=0);\end{array}\right.$$

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x dx = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n);\end{array}\right.$$

(4) $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-n)x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m+n)x dx = \left\{\begin{array}{ll} 0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n);\end{array}\right.$$

(5)
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x dx = 0,$$

pri čemu je pri izvodjenju formula (3) i (4) iskorišćena formula (1), a pri izvodjenju (5) iskorišćena je formula (2).

Definicija 1 Neka je $f(x)$ funkcija s periodom 2π, koja na intervalu $[-\pi, \pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste. *Trigonometrijski red Furijea* te funkcije je dat sa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

pri čemu su koeficijenti definisani sledećom formulom

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3...), \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3...). \end{aligned} \tag{7}$$

Koristiće se zapis

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{8}$$

pri čemu će se trigonometrijski red Furijea zvati skraćeno Furijeov red.

Primedba Umesto funkcija s periodom 2π možemo posmatrati funkcije definisane samo na intervalu $[-\pi, \pi]$ i koje zadovoljavaju uslov definicije. Definicija Furijeovog reda za takvu funkciju će biti ista.

1.1 Furijeovi redovi za funkcije sa proizvoljnim periodom

Neka je $f(x)$ funkcija s proizvoljnim periodom $2l$. Pretpostavljajući da je $x = at$, dobijamo funkciju $f(at)$ s periodom $2l/a$. Izaberimo a tako da $2l/a = 2\pi$ tj. $a = l/\pi$. Tada će nas smena $x = lt/\pi$ dovesti do funkcije $f(lt/\pi)$ s periodom 2π.

Ukoliko se f može razviti u konvergentan red, dobija se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}), \tag{9}$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx; \\ a_n &= \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \tfrac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3...); \\ b_n &= \tfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \tfrac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3...). \end{aligned} \tag{10}$$

Red (9) s koeficijentima odredjenim formulama (10), naziva se Furijeov red za funkciju $f(x)$ s periodom $2l$.

1.2 Razvoj u red kosinusnih funkcija zadatih na intervalu $[0, l]$

Ukoliko je na intervalu $[0, l]$ definisana neka funkcija tada ona može biti (na jedinstven način) produžena na celu brojevnu osu tako da se dobija parna funkcija s periodom $2l$.

Odavde i iz teoreme o uniformnoj konvergenciji, primenjene na parne periodične funkcije, sledi da, ukoliko $f(x)$ ima na $[0, l]$ konačan broj tačaka prekida i ukoliko je apsolutno integrabilna na tom intervalu, tada će unutar tog intervala u tačkama diferencijabilnosti imati razvoj u red kosinusa:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \tag{13}$$

gde je:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1, 2, 3...). \tag{14}$$

1.3 Razvoj u red sinusnih funkcija zadatih na intervalu $[0, l]$

Ukoliko je na intervalu $[0, l]$ definisana neka funkcija tada ona može biti (na jedinstven način) produžena na celu brojevnu osu tako da se dobija neparna funkcija s periodom $2l$.

Odavde sledi da, ukoliko $f(x)$ ima na $[0, l]$ konačan broj tačaka prekida i ukoliko je apsolutno integrabilna na tom intervalu, tada će unutar tog intervala u tačkama diferencijabilnosti imati razvoj u red sinusa:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{15}$$

gde je:

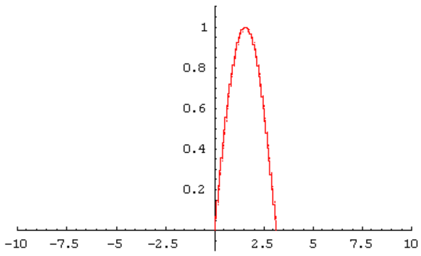
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1, 2, 3...). \tag{16}$$

1.4 Primeri Furijeovih redova

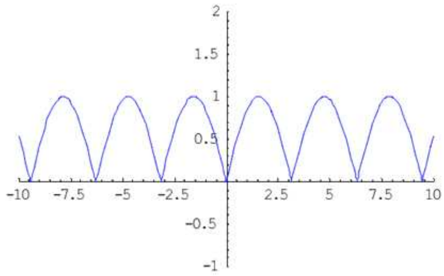
Primer 1: Napisati funkciju $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$, kao Furijeov kosinusni red.

Rešenje:

Grafik funkcije je dat na slici ispod:



Furijeov red koji sadrži samo kosinusne izraze se dobija samo ako je funkcija parna. Stoga razvijamo u red periodično produženje funkcije $\sin x$:



S obzirom da je funkcija parna, sledi da je $b_n = 0$, a izračunavanjem dobijamo da su koeficijenti a_n sledećeg oblika:

$$a_n = \frac{-2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}$$

ako je $n \neq 1$. Tada:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \cos n\pi)}{n^2 - 1} \cos n\pi x$$

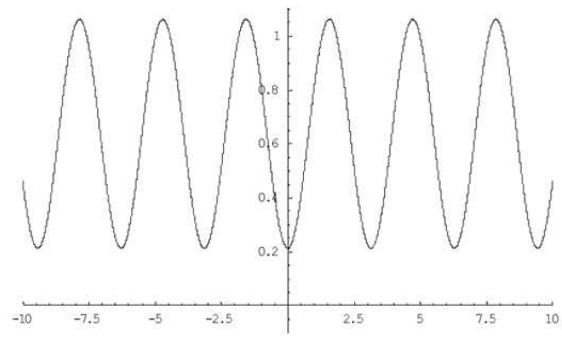
Za:

$$f = 2/Pi - 2/Pi * \sum_{n=2}^{m} ((1 + Cos[n * Pi])/((n * n) - 1)) * Cos[n * t];$$

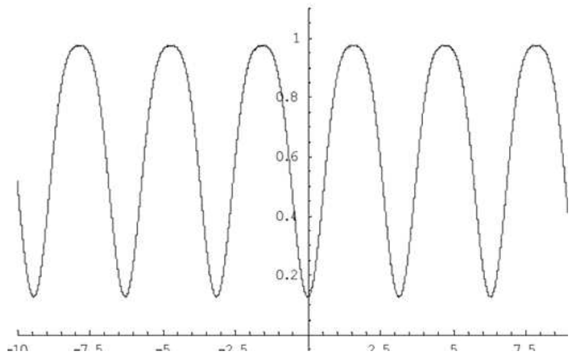
$$Plot[Evaluate[f], \{t, -4 * Pi, 4 * Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[0, 0, 0]\},$$
$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-10, 10\}\{-0.1, 1.1\}\}];$$

programski paket *Matematika* za različite vrednosti m daje:

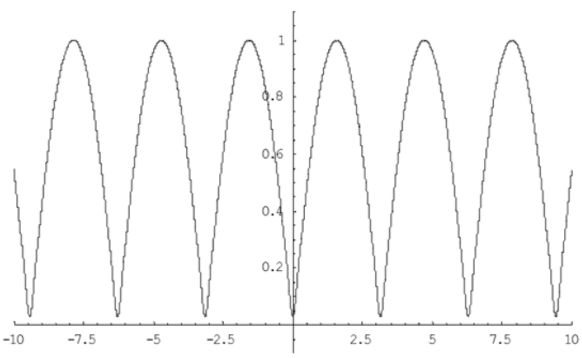
$m = 2:$



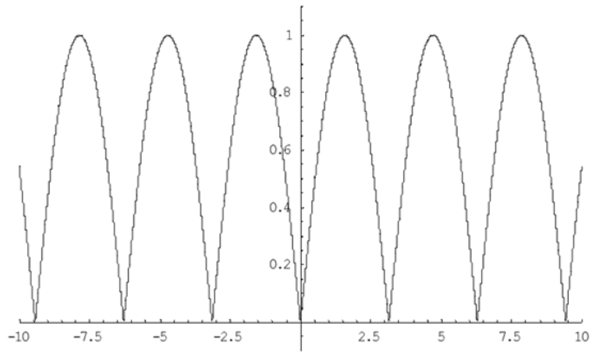
$m = 5:$



$m = 20:$



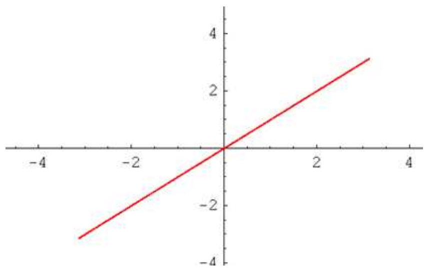
$m = 100:$



Restrikcija razvoja na $[0, \pi]$ daje traženi razvoj.

Primer 2: Neka je $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Treba odrediti Furijeov red funkcije f.

Rešenje: Grafik funkcije je dat na slici ispod:



Računamo koeficijente Furijeovog trigonometrijskog reda a_0, a_n i $b_n, n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

Ovo smo mogli da zaključimo i na osnovu neparnosti funkcija x i $x \cos nx$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Sada ćemo izračunati koeficijente $b_n, n \geq 1:$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Tada se Furijeov red funkcije $f(x) = x$ može zapisati ovako:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

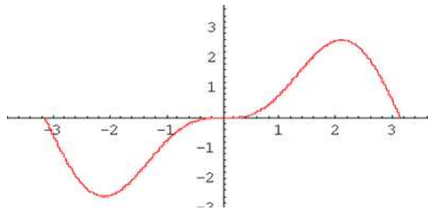
Za:

$$f = \sum_{n=1}^{m} (2 * (-1)^{n+1} Sin[n * x])/n;$$

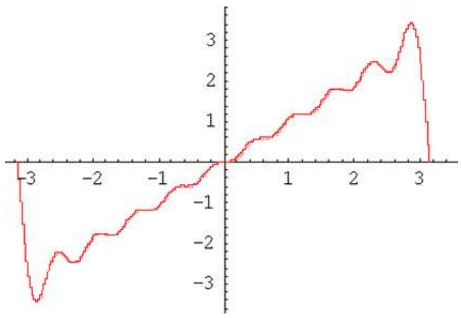
$$Plot[Evaluate[f], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[1, 0, 0]\},$$
$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-4, 4\}\{-4, 4\}\}];$$

programski paket *Matematika* za različite vrednosti m daje:

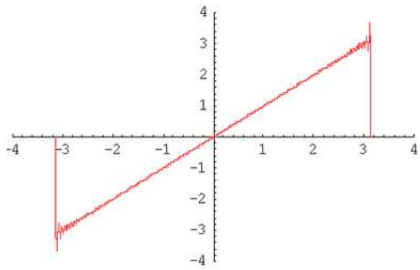
$m = 2:$



$m = 10:$



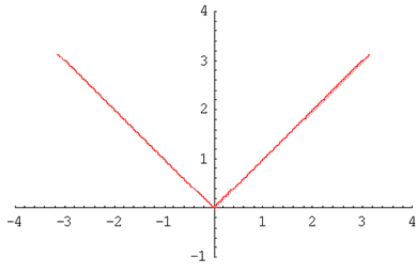
$m = 100:$



Na ovom primeru možemo videti da je Furijeov red u krajnjim tačkama intervala$[-\pi,\pi]$ jednak nuli,a da unutar intervala konvergira ka x.

Primer 3: Neka je $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\pi,\pi]$. Treba odrediti Furijeov red funkcije f.

Rešenje: Grafik funkcije je dat na slici ispod:



Računamo koeficijente Furijevog trigonometrijskog reda a_0, a_n i $b_n, n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nxdx = \begin{cases} -4/\pi n^2, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

Znamo da je $b_n = 0$ jer je funkcija parna pa nema potrebe proveravati. Furijeov red je:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \cos(2k-1)x$$

Za:

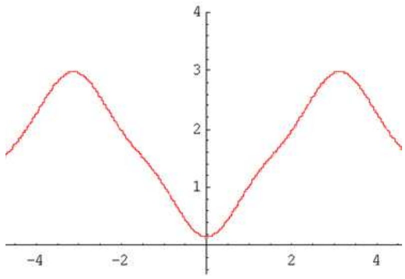
$$f = \frac{Pi}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{4}{Pi*(2*k-1)^2} Cos[(2*k-1)*x];$$

$$Plot[Evaluate[f], \{x, -2*Pi, 2*Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[1,0,0]\},$$

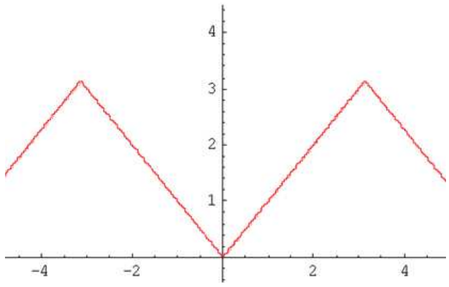
$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-5,5\}\{-0.5,4\}\}];$$

programski paket *Matematika* za različite vrednosti m daje:

$m = 2:$



$m = 20$;

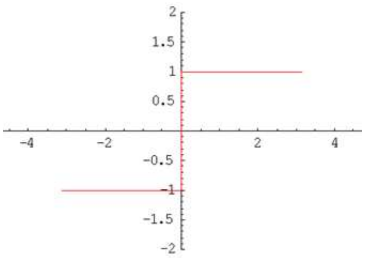


Primer 4: Neka je $f(x) = sgn(x), x \in [-\pi, \pi]$. To znači da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Rešenje:

Grafik funkcije je dat na slici ispod:



Očigledno da je funkcija neparna što znači da je $a_n = 0$. Izračunavamo koeficijente b_n :

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sgn(x) \sin nx dx = \begin{cases} 4/\pi n, & n \text{ paran} \\ 0, & n \text{ neparan} \end{cases}$$

I tada je Furijeov red ove funkcije:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x$$

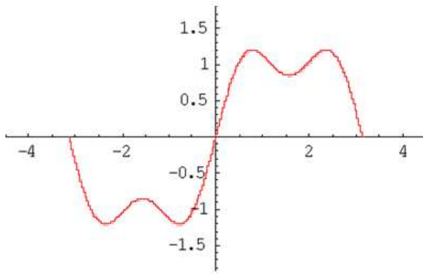
Za:

$$f = \sum_{k=1}^{m} (4 * Sin[(2*k-1)*x])/((2*k-1)*Pi);$$

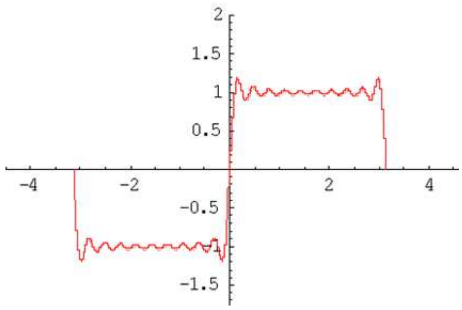
$$Plot[Evaluate[f], \{x, -Pi, Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[1,0,0]\},$$
$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-5,5\}\{-2,2\}\}];$$

programski paket *Matematika* za različite vrednosti m daje:

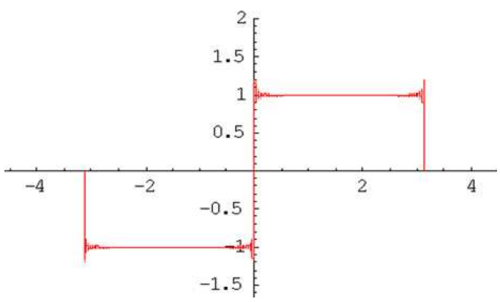
$m = 2:$



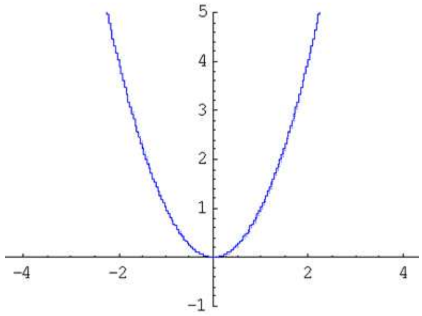
$m = 10:$



$m = 100:$



Primer 5: Neka je $f(x) = x^2$ na intervalu $x \in [-\pi, \pi]$. **Rešenje:**
Grafik funkcije je dat na slici ispod:



Funkcija je parna pa je $b_n = 0$ za sve n. Za izračunavanje koeficijenata a_n koristimo integraciju član po član:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Računamo slobodan član a_0:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Odatle dobijamo Furijeov red:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

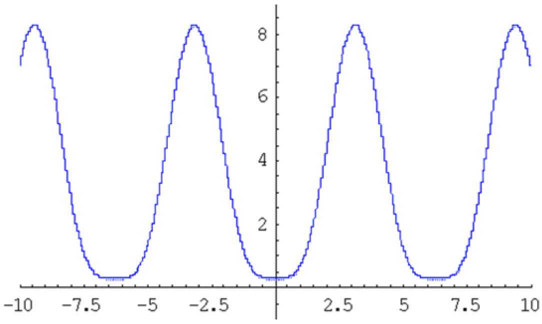
Za:

$$f = Pi^2/3 + \sum_{n=1}^{m} (4 * (-1)^n Cos[n * x])/(n^2);$$

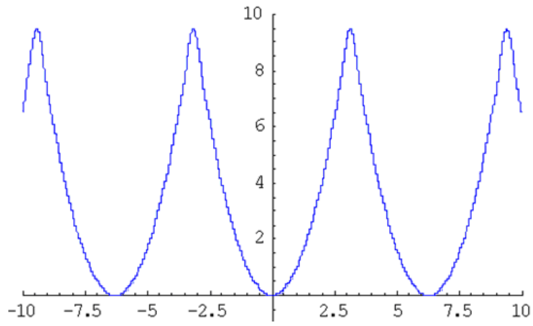
$$Plot[Evaluate[f], \{x, -4 * Pi, 4 * Pi\}, PlotStyle \to \{RGBColor[0, 0, 1]\},$$

$$PlotPoints \to 10000, PlotRange \to \{\{-10, 10\}\{-1, 9\}\}];$$

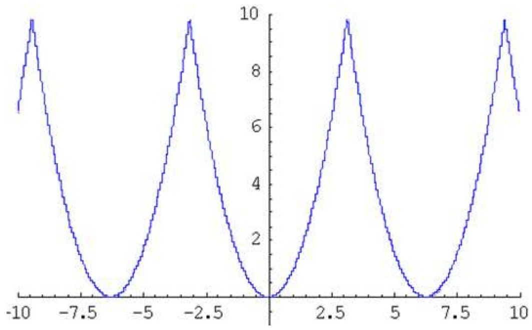
programski paket *Matematika* za različite vrednosti m daje:
$m = 2$:


8
6
4
2
-10 -7.5 -5 -2.5 2.5 5 7.5 10

$m = 10$:


10
8
6
4
2
-10 -7.5 -5 -2.5 2.5 5 7.5 10

$m = 100$:


10
8
6
4
2
-10 -7.5 -5 -2.5 2.5 5 7.5 10