WAVE FRONT ON 45

ABSTRACT. U prvom predavanju (A strana singlice) daje se motivacija za proučavanje talasnog fronta, a u drugom (B strana) se izlažu neki (noviji) rezultati dobijeni u saradnji sa profesorima Pilipovićem i Toftom.

1. INTRO

U izdanju časopisa "Notices of the AMS" iz Februara 2007. godine, objavljen je članak o Mikio Sato-u, tvorcu teorije hiperfunkcija. Autor članka je francuski matematičar Pjer Šapira. Mikio Sato (rođen 18. aprila 1928. godine) kreirao je teoriju hiperfunkcija koncem pedesetih godina prošlog veka, uvođenjem sasvim novog pristupa analizi, koji je izgrađen na temeljima teorije snopova[1], a danas je poznat kao "algebarska analiza". Satoov pristup je radikalno nov jer se, između ostalog, ne oslanja na pojam limesa; hiperfunkcije nisu limesi funkcija, nego se uvode pomoću vrednosti holomorfnih funkcija na rubovima, takozvanih "boundary values of holomorphic functions"[2].

U matematici i fizici je, pri proučavanju neke pojave (ili nekog dinamičkog sistema, na primer) u zadatom (afinom) prostoru, često neophodno posmatrati njenu "sliku" u dualnom prostoru. Furijeova transformacija je uobičajena alatka koja se koristi u tu svrhu. Ona je, međutim, globalna po svojoj prirodi, te nije pogodna za proučavanja na mnogostrukostima. Nasuprot tome, metod Sato-a se svodi na "kompleksifikaciju" realne mnogostrukosti i proučavanje "porekla" posmatranih "boundary values". U odgovarajućoj terminologiji, posmatra se kotangentno raslojenje[3] kao konormalno raslojenje realnog prostora u kompleksnom prostoru.

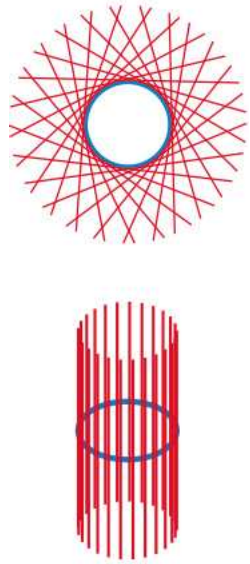
Kotangentno raslojenje se definiše pojmovima teorije snopova i moguće je okarakterisati ga kao simplektičku mnogostrukost. S obzirom da se realne funkcije na simplektičkim mnogostrukostima mogu interpretirati kao Hamiltonijani (energetske funkcije), kotangentna raslojenja se

Key words and phrases. hiperfunkcije, kotangentno raslojenje, teorija snopova, Hamiltonijan, mikrolokalna analiza, glavni simbol operatora.

[1]sheaf theory, koju je kod nas proučavao Nenad Đapić

[2]Funkcija f je holomorfna na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako u svakoj tački $z_0 \in \Omega$ postoji $\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$.

[3]cotangent bundle, dualno raslojenje tangentnog raslojenja.



Slika 1. tangentno raslojenje kružnice je cilindar.

mogu shvatiti i kao fazni prostor u kojem se (Hamiltonijanom) opisuje stanje izvesnog dinamičkog sistema. Ako mnogostrukost Ω predstavlja skup mogućih pozicija dinamičkog sistema, kotangentno raslojenje $T^*\Omega$ predstavlja skup mogućih pozicija i impulsa tog sistema.

Sredinom šezdesetih godina prošlog veka, Hans Lewy daje primer linearne jednačine prvog reda sa promenljivim koeficijentima koja nema rešenja u prostoru distribucija:

$$(-i\partial_{x_1} + \partial_{x_2} - 2(x_1 + ix_2)\partial_{x_3})u = f.$$

Najpre se smatralo da problem leži u izboru prostora (funkcija, odnosno distribucija) u kojem se rešenja traže. Ispostavilo se da objašnjenje valja tražiti u dubokim i skrivenim geometrijskim pojavama, preciznije, u kohomološkoj strukturi. Pokazuje se da je Levijeva jednačina "mikrolokalno" evivalentna sa Koši - Rimanovom jednačinom na realnoj hiperpovrši u kompleksnom prostoru.

Mikrolokalna analiza je oblast istraživanja u kojoj su ideje koje je uveo Sato od suštinskog značaja. Hikosaburo Komatsu kaže: "Mikrolokalna analiza je analiza na kosfernom raslojenju homogenog kotangentnog raslojenja $T^*\Omega \setminus 0$ nad $\Omega \subset \mathbb{R}$ gde je (uopštena funkcija) definisana." Po istom autoru, mikrolokalna analiza je definisana 1969. godine od strane Satoa, na međunarodnoj konferenciji u Tokiju i, otprilike u isto vreme, od strane Hörmandera. U radovima objavljenim početkom 70-tih godina prošlog veka Sato sa saradnicima zasniva mikrolokalnu analizu koristeći teoriju snopova i primenjuje je na rešavanje PDJ. Pjer Šapira tvrdi da su ovi radovi "imali značajan uticaj iako mnogi naučici nisu razumeli ni jednu jedinu reč". Naime, Sato je pokazao da se singulariteti od $\mathcal{B}/\mathcal{A}$, hiperfunkcija modulo realna analitička funkcija, razlažu u komponente nad $T^*\Omega \setminus 0$ koje se zovu mikrofunkcije. Zatim, da diferencijalni operatori deluju lokalno, to jest, mikrolokalno na mikrofunkcijama i da su injektivni na ne-karakterističnim tačkama od $T^*\Omega \setminus 0$. Posledično, hiperfunkcija u, rešenje jednačine $Pu = f$, je realna analitička ako je f realna analitička.

Ova razmatranja dovode do pojma analitičkog talasnog fronta. Po Satovoj definiciji, analitički talasni front hiperfunkcije (i distribucije) je jedan zatvoren konus u $T^*\Omega \setminus 0$. Ako je hiperfunkcija u rešenje jednačine $Pu = 0$, onda je njen talasni front sadržan u realnom delu karakterističnog varijeteta operatora P.

U uvodu udžbenika "Mikrolokalna analiza u klasama Ževrea i u kompleksnim domenima", Hikosaburo Komatsu navodi da Satov pristup, iako prirodan, na žalost, nije baš sasvim lak za novajlije u oblasti.

Navedenim problemima su se u to vreme bavili i drugi naučnici. Lars Hörmander (rođen 24. januara 1931. godine) je, u svrhu proučavanja talasnog fronta, uveo pristup zasnovan na pseudo-diferencijalnim operatorima i, opštije, integralnim operatorima Furijea. Po njemu, talasni front WFu od u je zatvoren konus u faznom prostoru koji je prazan ako i samo ako je u klase C^∞. Hörmander je pokazao da pseudo-diferencijalni operatori ne povećavaju talasni front.

U to vreme, 1969. - 1972. godine, postojalo je snažno suparništvo između navedenih pristupa, koje je rezultiralo objavljivanjem značajnih radova koji su se bavili sličnim problemima i sadržali slične teoreme ali su definicije i osnovni pojmovi, kao i dokazi, bili sasvim različiti. Jedan od značajnih rezultata do kojeg su došli Sato i njegovi saradnici sa jedne strane i Hörmander (uz njega i Duistermaat) sa druge strane je prostiranje singulariteta rešenja hiperboličnih jednačina duž bikarakterističnih tokova, što je bio problem iniciran od starne Egorova[4].

Kao apetajzer, služimo žestoko:

Primer 1.1. *Singularni nosač funkcije (distribucije) u,* sing supp u *je komplement najvećeg otvorenog skupa u* Ω *na kojem se u poklapa sa* C^∞ *funkcijom. Uvođenjem kanoničke projekcije* $\pi : T^*\Omega \setminus 0 \to \Omega$ *pokazuje se da važi*

$$\pi(WFu) = \textit{singsupp}\ u.$$

[4]Bikarakteristika je trajektorija Hamiltonovog vektorskog polja na $T^*\Omega \setminus 0$.

Primer 1.2. *Neka je dat pseudo-diferencijalni operator A reda m na Ω i neka je njegov glavni simbol $\alpha_m(x,\xi)$. Neka je, dalje, char A skup karakterističnih pravaca tog simbola,*

$$char\ \ A = \{(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0\ :\ \alpha_m(x,\xi) = 0\}.$$

Tada važi

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset WF(Au) \cup char\ \ A.$$

Obe inkuzije se, implicitno, već navedene u predavanju. Prva inkluzija je pseudo-lokalno svojstvo operatora A, a druga predstavlja dalekosežno uopštenje teoreme o glatkosti rešenja eliptičkih jednačina sa glatkim koeficijentima. Naime, na ovaj način se pokazuje da se singulariteti rešenja jednačine $Au = f$, gde je $f \in C^\infty$, prostiru duž bikarakteristika glavnog simbola $\alpha_m(x,\xi)$.

2. Furijeova transformacija

Podsetimo se, Furijeova transformacija (apsolutno integrabilne) funkcije f je data sa

$$\mathcal{F}(u(\cdot))(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int u(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Uočimo dulanost između svojstava diferencijabilnosti (glatkosti) i integrabilnosti, odnosno opadanja u beskonačnosti. Grubo rečeno, ukoliko funkcija u ima više izvoda utoliko njena Furijeova transformacija brže opada u beskonačnosti, a, takođe, što brže funkcija u opada u beskonačnosti, to više izvoda ima $\hat{u}$. Preciznije,

a) ako u ima N izvoda koji su svi integrabilni, tada $\widehat{u}$ opada u beskonačnosti kao $|\xi|^{-N}$.
b) ako u opada u beskonačnosti kao $|x|^{-N}$ tada $\widehat{u}$ ima neprekidne i ograničene izvode do reda $N-1-d$.

Primetimo da ovi uslovi nisu simetrični. U slučaju b) dolazi do gubitka $d+1$ izvoda, a, dok su pod a) izvodi integrabilni, pod b) su samo ograničeni. U slučaju da $u \in \mathcal{S}$, važi $\hat{u} \in \mathcal{S}$.

Iz navedenog sledi da, ako $u \in \mathcal{D}$ tada za svako $N \in \mathbb{N}$ postoji $C_N > 0$ tako da važi

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Pri tome, ne postoji netrivijalna funkcija u takva da je $\operatorname{supp} u$ kompaktan i da je $\operatorname{supp} \hat{u}$ kompaktan.

Neka je, na primer, $\operatorname{supp} \hat{u} \subset [-A, A]$. Tada je u glatka i

$$u(x) = \int_{-A}^{A} \hat{u}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi,$$

Pretpostavimo da je $u(x) = 0$ za sve x iz nekog intervala $[a, b]$. U tački $x_0 \in (a, b)$ važi

$$u^{(n)}(x_0) = \int_{-A}^{A} \hat{u}(\xi)(2\pi i\xi)^n e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći razvoj eksponencijalne funkcije u Tejlorov red dobija se

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-A}^{A} \hat{u}(\xi) e^{2\pi i(x-x_0)\xi} e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[2\pi i(x-x_0)]^n}{n!} \int_{-A}^{A} \hat{u}(\xi)\xi^n e^{2\pi i x_0 \xi} d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

što protivreči pretpostavci da je u netrivijalna.

3. Nosač, singularni nosač

Nosač funkcije je zatvaranje skupa tačaka u kojima je ta funkcija različita od nule, odnosno, nosač funkcije u, $\operatorname{supp} u$, je komplement skupa tačaka x takvih da u iščezava u nekoj okolini tačke x. Ova definicija se proširuje na distribucije. Pre svega, moramo definisati šta znači da distribucija iščezava na nekom otvorenom skupu Ω.

Prostor test funkcija $\mathcal{D}(\Omega)$ čine glatke funkcije sa nosačem u Ω:

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp} \varphi \Subset \Omega\}.$$

Distribucije nad skupom Ω, $\mathcal{D}'(\Omega)$, su neprekidne linearne funkcionele na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicija 3.1. *Distribucija $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je jednaka nuli na otvorenom skupu Ω ($f \equiv 0$) znači da je $\langle f, \varphi \rangle = 0$ za sve test funkcije φ za koje je* $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$. *Nosač distribucije f (*$\operatorname{supp} f$*) je komplement skupa tačaka x takvih da je f jednaka nuli u nekoj okolini tačke x.*

Primer 3.2. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$. *Zaista, ako je Ω proizvoljan otvoren skup i $0 \notin \Omega$, onda je $\delta \equiv 0$, jer je $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ za sve φ za koje je* $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$. *Sa druge strane, u proizvoljnoj okolini koordinatnog početka postoji test funkcija za koju je, na primer $\varphi(0) = 1$, pa važi $\delta \not\equiv 0$. Objasnite zašto je i* $\operatorname{supp} \delta' = \{0\}$.

Napomena 3.3. *Ako je $\langle f, \varphi \rangle = \int g(x)\varphi(x)dx$, gde je g neprekidna funkcija, lako se pokazuje da se nosač funkcije g i odgovarajuće distribucije f poklapaju. Razmislite šta se dešava u slučaju da f ima prekide, na primer, skok u nekoj tački.*

Napomena 3.4. *Može se pokazati da se prostor distribucija kompaktnog nosača, $\mathcal{E}'$, poklapa sa dualom prostora glatkih funkcija, C^∞. Važi*

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$$

U nastavku će se koristiti sledeća činjenica. Ako $u \in \mathcal{E}'$ onda je $\hat{u}$ glatka funkcija[5]. Štaviše, postoje $C > 0$ i $N \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^N. \tag{2}$$

Ova procena sledi iz teorema Peli-Vinerovog tipa ili iz potapanja $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}'$, jer su elementi prostora temperiranih distribucija $\mathcal{S}'$, koji je invarijantan s obzirom na Furijeovu transformaciju, distribucije sporog rasta.

Neka je dat operator sa konstantnim koeficijentima

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha.$$

Glavni simbol[6] ovog operatora je

$$p_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \left(-i\xi \right)^\alpha.$$

Kažemo da je P eliptičan operator ako njegov glavni simbol $p_m(\xi)$ nema realnih nula izuzev u $\xi = 0$. Jednačina $Pu = f$ se može (ne)formalno rešavati primenom Furijeove transformacije, tako da je

$$p(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi) \quad \text{odakle sledi} \quad \hat{u}(\xi) = \frac{1}{p(\xi)} \hat{f}(\xi), \tag{3}$$

gde je $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \left(-i\xi \right)^\alpha$. Polinom $p(\xi)$ može da se anulira za "male vrednosti" promenljive ξ. Stoga, umesto da se traži fundamentalno rešenje E, za koje je $PE = \delta$ (pa je $u = E * f$), traži se parametriks, odnosno distribucija F takva da je $PF \approx \delta$, u izvesnom smislu. Preciznije, tražimo F tako da je $PF = \delta + R$, gde je ostatak R glatka funkcija. Suština ove ideje je da nas prvenstveno interesuju singulariteti rešenja, a konvolucija sa glatkom funkcijom daje glatku funkciju, pa taj deo (sabirak) uopšte nema udela u singularitetima. Parametriks se primenjuje pri traženju lokalnih rešenja, i, takođe, pri lociranju singulariteta, što je, u stvari, njegova suptilnija primena.

Ako je $Pu = f$ i pri tome je f singularna na nekom zatvorenom skupu K, šta možemo reći o singularitetima rešenja u? Preciznije, kažemo da je distribucija f glatka (C^∞) na otvorenom skupu Ω ako postoji $g \in C^\infty$ takva da je $\langle f, \varphi \rangle = \int g(x)\varphi(x)dx$, za sve φ za koje je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq$

[5] Pogledati svojstvo b) u prethodnoj sekciji.

[6] top-order symbol

Ω. Singularni nosač distribucije f (sing supp f) je komplement unije otvorenih skupova na kojima je f glatka.

$\boxed{\text{Singulariteti distribucije se nalaze u njenom singularnom nosaču.}}$

Sada je moguće preformulisati pitanje sa početka pasusa. Kakav je odnos između sing supp Pu i sing supp u? Ako je $u \in C^\infty$ na skupu Ω, tada je i Pu glatka funkcija na Ω. Ovo sledi iz (3) i (1). Prema tome, komplement od sing supp Pu je nadskup komplementa od sing supp u, pa važi

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subseteq \operatorname{sing\,supp} u.$$

Za eliptične operatore važi sing supp Pu = sing supp u. Ovo svojstvo se naziva hipoeliptičnost, i podrazumeva da je svako rešenje jednačine $Pu = f$ glatko kadgod je f glatka. Dokaz netrivijalne inkluzije

$$\operatorname{sing\,supp} u \subseteq \operatorname{sing\,supp} Pu,$$

to jest, dokaz hipoeliptičnosti eliptičnih operatora, oslanja se na glatkost ostatka R korišćenog u konstrukciji parametriksa.

U opštem slučaju, moguće je da operator P "izbriše" neke singularitete funkcije/distribucije u, to jest, sing supp $Pu \subsetneq$ sing supp u, kao i sing supp $u \subsetneq$ sing supp Pu.

4. Talasni front

Singularni nosač određuje položaj singulariteta neke distribucije. Preciznija analiza prirode/porekla singulariteta je moguća ako se posmatra ponašanje distribucije u faznom prostoru. U tu svrhu se uvodi pojam mikrolokalne glatkosti. Neka je data funkcija/distribucija u i neka je φ test funkcija koja je glatka i $\varphi(x_0) = 1$ (ili $\varphi(x_0) \neq 0$). Ako je u glatka u blizini tačke x_0 onda je $\varphi u \in \mathcal{D}$ pa je $\widehat{\varphi u}$ brzo opadajuća funkcija. Sada pristupamo lokalizaciji u frekvencijskom domenu. Ako postoji otvoren konus Γ koji sadrži pravac ξ_0 tako da je

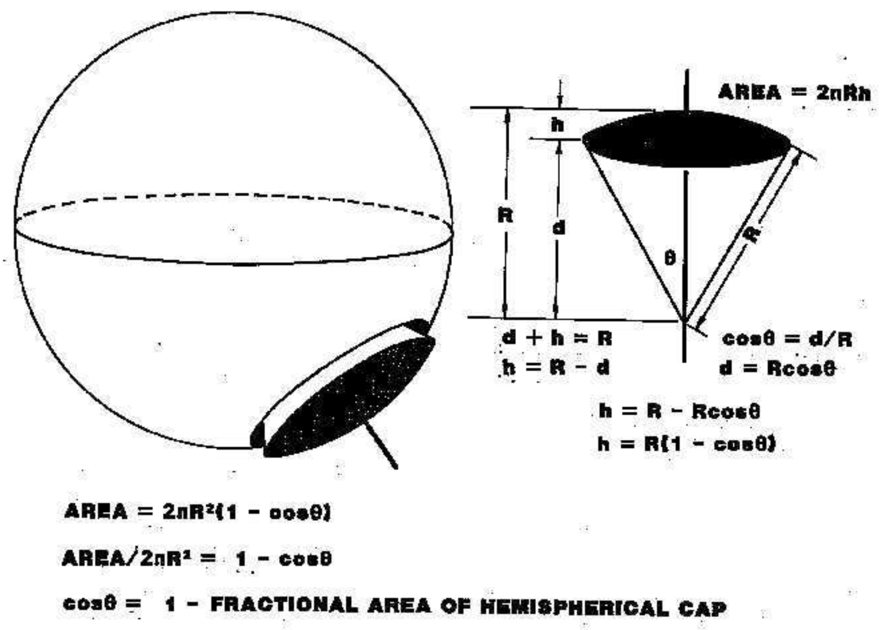
$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma$$

za sve $N \in \mathbb{N}$, onda je u mikrolokalno glatka u tački (x_0, ξ_0). Ponovimo:

Definicija 4.1. *Distribucija u je mikrolokalno glatka u tački (x_0, ξ_0) ako postoji $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(x_0) \neq 0$, i otvoren konus Γ koji sadrži ξ_0 takav da za svako $N \in \mathbb{N}$ postoji $C_N > 0$ tako da važi*

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \forall \xi \in \Gamma.$$

Talasni front od u, u oznaci $WF(u)$, je komplement skupa tačaka (x, ξ) u kojima je u mikrolokalno glatka.



Slika 2. presek konusa i sfere.

U prethodnoj definiciji se podrazumeva nezavisnost talasnog fronta od izbora funkcije φ sa navedenim osobinama. Ova činjenica nije očigledna, a njen dokaz sadrži tehnike neophodne za dalji rad.

Najpre, primetimo da je proizvoljan konus $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^d$ određen svojim presekom sa jediničnom sferom S^{d-1}.

Lema 4.2. *Neka je dat konus Γ i neka je Γ' konus takav da je zatvaranje skupa Γ' sadržano u Γ. Tada postoji $c > 0$ tako da za sve $\eta \in \Gamma'$ važi da je zatvorena lopta sa centrom u η poluprečnika $c|\eta|$ sadržana u Γ, $L(\eta, c|\eta|) \subset \Gamma$.*

Proof. Rastojanje skupova $\Gamma' \cap S^{d-1}$ i $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ je neki pozitivan broj d. Neka je, na primer, $c := d/2$. Važi

$$|\xi - \eta| < c|\eta| \Rightarrow |\frac{\xi}{|\eta|} - \frac{\eta}{|\eta|}| < c < d \Rightarrow \frac{\xi}{|\eta|} \in \Gamma' \Rightarrow \xi \in \Gamma',$$

odakle sledi tvrđenje. $\square$

Neka je $u \in \mathcal{E}'$ i neka je $\Sigma(u) \subseteq \mathbb{R}^d \setminus 0$ definisan na sledeći način: $\xi \notin \Sigma(u)$ ako postoji otvoren konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, $\xi \in \Gamma$, i

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists C_N > 0) \text{ tako da važi } |\hat{u}(\eta)| \leq C_N(1 + |\eta|)^{-N}, \quad \forall \eta \in \Gamma.$$

Skup $\Sigma(u)$ je zatvoren konus i $\Sigma(u) = \emptyset$ ako i samo ako je $u \in C_0^\infty$.

Propozicija 4.3. *Neka je $u \in \mathcal{E}'$ i $\varphi \in C^\infty$. Tada je $\Sigma(\varphi u) \subseteq \Sigma(u)$.*

Proof. Dovoljno je dokazati da propozicija važi za $\varphi \in C_0^\infty$. Naime, ako $\varphi \in C^\infty$, onda postoji $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty$ takva da je $\tilde{\varphi} = \varphi$ u okolini nosača od u, pa je $\varphi u = \tilde{\varphi} u$.

Pokazaćemo da, ako $\xi \notin \Sigma(u)$ onda $\xi \notin \Sigma(\varphi u)$, za $\varphi \in C_0^\infty$. Neka je Γ konus iz definicije skupa $\Sigma(u)$ i neka je $\Gamma' \subsetneq \Gamma$ konus kao u prethodnoj lemi. Neka $\eta \in \Gamma'$.

$$\widehat{\varphi u}(\eta) = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\eta - \xi)\hat{u}(\xi)d\xi = I_1 + I_2,$$

gde je

$$I_1 = \int_{|\xi-\eta| \le c|\eta|} \hat{\varphi}(\eta - \xi)\hat{u}(\xi)d\xi, \quad I_2 = \int_{|\xi-\eta| > c|\eta|} \hat{\varphi}(\eta - \xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

a c je određeno u prethodnoj lemi.

Iz $|\xi - \eta| \le c|\eta|$ sledi

$$|\xi - \eta| \ge |\eta| - |\xi| \Rightarrow c|\eta| \ge |\eta| - |\xi| \Rightarrow |\xi| \ge (1-c)|\eta|.$$

U I_1 važi $\xi \in \Gamma$ pa je

$$|\hat{u}(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N} \le \tilde{C}_N(1+|\eta|)^{-N}.$$

Dakle,

$$|I_1| \le C_N(1+|\eta|)^{-N} \int |\hat{\varphi}(\xi)|d\xi \le C_N(1+|\eta|)^{-N}.$$

Kada je $|\xi - \eta| > c|\eta|$ važi

$$|\xi - \eta| \ge |\xi| - |\eta| \ge |\xi| - \frac{1}{c}|\xi - \eta| \Rightarrow |\xi - \eta| \ge \frac{c}{c+1}|\xi|.$$

Iz (2) i brzog opadanja $\hat{\varphi}$ sledi

$$|I_2| \le C \int_{|\xi-\eta|>c|\eta|} (1+|\eta-\xi|)^{-N-M-d-1}(1+|\xi|)^M d\xi.$$

Sada se koriste nejednakosti

$$(1+|\eta-\xi|)^{-N} \le (1+c|\eta|)^{-N} \le C(1+|\eta|)^{-N},$$

$$(1+|\eta-\xi|)^{-M-d-1} \le (1+\frac{c}{c+1}|\xi|)^{-M-d-1} \le \tilde{C}(1+|\xi|)^{-M-d-1},$$

iz kojih, kada je $|\xi - \eta| > c|\eta|$, sledi

$$(1+|\eta-\xi|)^{-N-M-d-1}(1+|\xi|)^M \le C(1+|\eta|)^{-N}(1+|\xi|)^{-d-1},$$

pa je $|I_2| \le C(1+|\eta|)^{-N}$ za proizvoljno $N \in \mathbb{N}$.

Prema tome, $|\widehat{\varphi u}(\eta)| \le C_N(1+|\eta|)^{-N}$ za proizvoljno $N \in \mathbb{N}$ i za sve $\eta \in \Gamma'$. Time je propozicija dokazana. □

Posledica 4.4. *Neka je $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pretpostavlja se da je $\varphi_2(x) \neq 0$ ako $x \in \operatorname{supp}\varphi_1$. Tada važi $\Sigma(\varphi_1 u) \subseteq \Sigma(\varphi_2 u)$.*

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^d$ i neka je $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Za proizvoljnu tačku $x \in \Omega$ definišemo

$$\Sigma_x(u) = \cap \Sigma(\varphi u) \;\; ; \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi(x) \neq 0.$$

Skup $\Sigma_x(u)$ je zatvoren konus.

Propozicija 4.5. *Neka je Γ konusna okolina skupa $\Sigma_x(u)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tada postoji okolina U tačke x takva da je $\Sigma(\varphi u) \subseteq \Gamma$ za proizvoljnu funkciju $\varphi \in C_0^\infty(U)$.*

Proof. Za svako $\xi \in K = S^{d-1} \setminus \Gamma$ važi:

- postoji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ (koja zavisi od izbora tačke ξ) takva da je $\varphi(x) \neq 0$,
- postoji okolina tačke ξ koja je disjunktna sa $\Sigma(\varphi u)$.

Ove okoline pokrivaju skup K koji je kompaktan, pa postoji konačno mnogo tih okolina koje pokrivaju skup K. Drugim rečima, postoji konačno mnogo funkcija $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_j(x) \neq 0$, $j = \{1, \dots, n\}$, i $K \cap (\cap_{j=1}^n \Sigma(\varphi_j u)) = \emptyset$. Odavde je $\cap_{j=1}^n \Sigma(\varphi_j u) \subseteq \Gamma$.

Neka je U okolina tačke x u kojoj nijedna od funkcija φ_j ne iščezava. Iz prethodne posledice sledi da je $\Sigma(\varphi u) \subseteq \Sigma(\varphi_j u)$ za svaku funkciju $\varphi \in C_0^\infty(U)$, čime je propozicija dokazana. □

Prethodna propozicija se tumači na sledeći način: Skup $\Sigma_x(u)$ je neka vrsta limesa skupova $\Sigma(\varphi u)$ kada $\operatorname{supp}\varphi \to \{x\}$ i $\varphi(x) \neq 0$. Konačno:

Definicija 4.6. *Talasni front distribucije $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, u oznaci $WF(u)$ se definiše sa*

$$WF(u) = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d \setminus 0 \quad : \quad \xi \in \Sigma_x(u)\}.$$

Iz ove definicije direktno sledi da je projekcija talasnog fronta na Ω upravo singularni nosač od u.

Primer 4.7. *Proizvod proizvoljnih distribucija f i g.* *Može se pokazati da je proizvod dobro definisan ako su odgovarajući singularni nosači disjunktni. Štaviše, čak i kada se singularni nosači presecaju $f \cdot g$ se može definisati ako važi da ne postoji $(x_0, \xi_0) \in WF(f)$ takva da je $(x_0, -\xi_0) \in WF(g)$.*

Primer 4.8. *Problem definisanja restrikcije distribucije na površ.* *Moguće je definisati restrikciju distribucije ako normalni pravci na površ nisu u talasnom frontu te distribucije.*