UVOD U TEORIJU OKVIRA

DR NENAD TEOFANOV

1. Uvod

Teorija okvira spada u granu savremene matematičke analiza koja beleži nagli razvoj u poslednjoj deceniji. Tome je prvenstveno doprinelo široko polje primena, pre svega u signalnoj analizi, spisak primena sa odgovarajućim referencama čitalac može da nađe u uvodu članka [1]. Primena okvira u obradi muzičkih signala je izložena u [6]. Sa druge strane, teorija okvira je pokrenula niz pitanja u okviru funkcionalne analize, od kojih mnoga čekaju na odgovor.

Osnovne pojmove teorije okvira mogu razumeti i usvojiti studenti viših godina studija matematičkih usmerenja, pa zastupamo mišljenje da se odabrana poglavlja teorije okvira mogu obrađivati u okviru seminarskih radova na svim nivoima studija. Semestralni kursevi teorije okvira mogu se organizovati na master i doktorskim studijama za studente koji su usmereni ka savremenim rezultatima matematičke analize i njenih primena.

S obzirom da šira matematička javnost nije u mogućnosti da se upozna sa ovom teorijom na srpskom jeziku, kao i da pregledni članci stučne literature na engleskom jezikom uglavnom pretpostavljaju visok nivo predznanja, želja nam je da ovim člankom popunimo navedenu prazninu i zainteresujemo čitaoce da prodube svoja znanja daljim istraživanjem. Iz navedenih razloga u članku, po pravilu, nismo navodili dokaze.

Članak je zasnovan na predavanjima koja je autor držao u okviru redovnog Seminara projekta 144016 MNTR. Plan predavanja obuhvata:

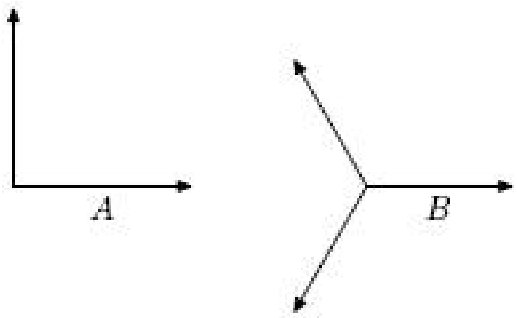
- motivaciju u $\mathbb{R}^2$;
- odnos pojma okvira i "klasičnih" baza (separabilnih Hilbertovih prostora);
- izlaganje nekih zanimljivih teorijskih pitanja, kao što je "Fajhtingerova pretpostavka";
- kratak osvrt na teoriju Gaborovih okvira;
- navođenje originalne definicije iz [7].

2. Motivacija u $\mathbb{R}^2$

Dati su skupovi vektora u $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(1,0),(0,1)\} = \{e_1, e_2\}$$

$$B = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big\{(1,0),(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2})\Big\} = \{f_1, f_2, f_3\}.$$



Slika 1. Skupovi A i B.

Skup A je ortonormirana baza (ONB) Hilbertovog prostora $\mathbb{R}^2$[1] i sa skupom B ima sledeće sličnosti i razlike:

- Svaki vektor iz $\mathbb{R}^2$ se može napisati kao linearna kombinacija vektora skupa A, odnosno skupa B.
- Vektori skupa A su linearno nezavisni, pa su koeficijenti razvoja $x = c_1 e_1 + c_2 e_2$ jedinstveno određeni. Vektori skupa B nisu linearno nezavisni, pa koeficijenti u odgovarajućem razvoju nisu jedinstveni.
- Norme vektora skupa A su jednake jedinici, a skupa B su jednake sa $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- Vektori skupa A su ortogonalni, a vektori skupa B nisu.
- Koeficijenti u razvoju $x = c_1e_1+c_2e_2$ su dati skalarnim proizvodom $c_j = (x, e_j)$, $j = 1, 2$. Takođe, važi: $x = d_1f_1 + d_2f_2 + d_3f_3$ za $d_j = (x, f_j)$, $j = 1, 2, 3$.
- Norma vektora $x \in \mathbb{R}^2$ se može rekonstuisati iz koeficijenata, odnosno važi Parsevalova jednakost:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1,2} |c_j|^2 = \sum_{j=1,2,3} |d_j|^2.$$

[1]Hilbertov prostor je vektorski prostor u kojem je definisan skalarni proizvod i u kojem svaki Košijev niz konvergira.

Dati skupovi su primeri (Parsevalovih) *okvira* prostora $\mathbb{R}^2$. Primer skupa B pokazuje da se mnoga svojstva ONB mogu preneti na skupove koji nisu baze[2]. U ovoj činjenici leži osnovna motivacija za proučavanje okvira.

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat sa značajem upotrebe ONB (separabilnih) Hilbertovih prostora[3], a ovde ponavljamo da se informacija o elementu x prenosi na koeficijente c_j razvoja tog elementa u red/konačnu sumu pomoću neke ONB. Pri prenosu podataka internetom, na primer, koriste se koeficijenti razlaganja nekog signala i odgovarajući aparat linearne algebre i numeričke matematike za izradu brzih i pouzdanih algoritama koji dati signal razlažu, obrađuju, prenose, skladište i rekonstruišu.

Uslov ortogonalnosti implicira da se izgubljeni koeficijenti ne mogu rekonstruisati iz preostalih, pa je deo informacije koju oni nose zauvek izgubljen. Pri prenosu slike ili zvuka se ispostavlja da su ponekad algoritmi (zasnovani na rezultatima linearne algebre, numeričke analize i teorije operatora) efikasniji ako se odustane od uslova jedinstvenosti. Tako, najznačajnije karakteristike ONB, linearna nezavisnost i ortogonalnost u nekim situacijama predstavljaju ozbiljna ograničenja. Sa druge strane, okviri se mogu dizajnirati/skrojiti tako da ispune izvesne specifičnosti koje nameće priroda posmatranog problema.

U nastavku će se sa $\mathcal{H}$ označavati separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ i normom $\|\cdot\|$. Neka je $B = \{f_n\}$. Zatvaranje skupa svih konačnih linearnih kombinacija vektora skupa B se označava sa $\overline{\text{span}} B$.[4]

Napomene o prostoru $\mathbb{R}^2$ se mogu formulisati na sledeći način:

- Da li važi $\overline{\text{span}} B = \mathbb{R}^2$?
- Ako je $f = \sum c_n f_n$ da li su koeficijenti c_n jedinstveno određeni i da li je konvergencija reda bezuslovna?
- Ako B nije ONB, da li onda važi $c_n = (f, f_n)$?
- Pretpostavimo da važi $\{c_n\} \in l^2$. Kakav je odnos norme $f \in \mathcal{H}$ i norme niza $\{c_n\}$?

[2]Ovde se podrazumeva da je neki skup baza vektorskog prostora ako se njegovi elementi mogu na jedinstven način predstaviti kao linearne kombinacije tog skupa.

[3]Uslov separabilnosti implicira da postoji prebrojiva baza, čiji se elementi stoga mogu indeksirati skupom $\mathbb{N}$.

[4]Zatvaranje skupa je moguće shvatiti kao dodavanje skupu njegovih tačaka nagomilavanja.

3. Okviri i baze

Familija elemenata $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ je *Beselov niz* ako postoji konstanta $B > 0$ tako da važi

$$\sum |(f, f_n)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Potreban i dovoljan uslov da $\{f_n\}$ bude Beselov niz je da je operator sinteze

$$T : \{c_n\} \to \sum c_n f_n$$

dobro definisan iz l^2 **u** $\mathcal{H}$.

Na osnovu teoreme Banah-Štajnhaus-a T je ograničen. Njemu adjungovan operator, operator analize, $T^* : \mathcal{H} \to l^2$ je dat sa $T^* f = \{(f, f_n)\}$.

Treba primetiti da, ako je $\{f_n\}$ Beselov niz, onda red $\sum c_n f_n$ konvergira bezuslovno za svako $\{c_n\}$ iz l^2.

Definicija 3.1. *Familija elemenata $\{f_n\} \subseteq \mathcal{H}$ je* okvir *u $\mathcal{H}$ ako postoje konstante $A, B > 0$ tako da važi*

$$A\|f\|^2 \leq \sum |(f, f_n)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Potreban i dovoljan uslov da $\{f_n\}$ bude okvir u $\mathcal{H}$ je da je operator

$$T : \{c_n\} \to \sum c_n f_n$$

dobro definisan iz l^2 **na** $\mathcal{H}$.

Skup vektora $\{f_n\}$ je potpun u $\mathcal{H}$ ako je $\mathrm{span}\{f_n\}$ gust u $\mathcal{H}$, ili, ekvivalentno, ako iz $(f, f_n) = 0$ za sve indekse n sledi $f = 0$. Treba primetiti da, u opštem slučaju, ako je $\{f_n\}$ je potpun u $\mathcal{H}$, onda ne mora da važi da se proizvoljan element iz $\mathcal{H}$ može razviti u red oblika $\sum c_n f_n$. Dakle, okvir je uvek potpun u $\mathcal{H}$.

Ako je $A = B$ onda je okvir *čvrst*. Okvir je *egzaktan* ako izbacivanjem jednog (proizvoljnog) elementa on prestaje da bude okvir. Svaka ONB je okvir i $A = B = 1$. Takođe, dodavanjem proizvoljnog Beselovog niza na ONB, uvek se dobije okvir. U konačno-dimenzionim prostorima, svaki okvir je unija neke baze i "još nekih elemenata". Ovo, međutim, ne važi za beskonačno dimenzione prostore.

3.1. **Operator okvira.** *Operator okvira* $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ je dat sa

$$Sf = TT^* f = \sum (f, f_n) f_n.$$

On je ograničen, pozitivan[5] i sirjektivan. Važi $S = S^*$ jer je svaki ograničen i pozitivan operator na kompleksnom Hilbertovom prostoru samo-adjungovan.

[5]Pozitivnost operatora S sledi iz ograničenosti operatora T.

Ako je $\{f_n\}$ okvir sa granicama A i B, onda je $AI \leq S \leq BI$, gde je I jedinični operator. Zaista, iz

$$(AIx, x) = A\|x\|^2, \quad (Sx, x) = \sum |(x, f_n)|^2, \quad (BIx, x) = B\|x\|^2,$$

za sve $x \in \mathcal{H}$, i iz definicije okvira sledi $(AIx, x) \leq (Sx, x) \leq (BIx, x)$. Odavde sledi i injektivnost operatora S. S obzirom da je S sirjektivan, on definiše topološki izomorfizam.

Jasno, inverzni operator S^{-1} operatora S je takođe ograničen i pozitivan. Pri tome je $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ i, ako je $\{f_n\}$ okvir, onda je i $\{S^{-1}f_n\}$ okvir. Prema tome, za zadati okvir $\{f_n\}$ sa operatorom okvira S, svaki $f \in \mathcal{H}$ se može predstaviti u obliku bezuslovno konvergentnog reda

$$f = SS^{-1}f = \sum (f, S^{-1}f_n)f_n = \sum (f, f_n)S^{-1}f_n. \tag{1}$$

Optimalne granice okvira se date sa $A = 1/\|S^{-1}\|$, $B = \|S\|$. Ako je okvir $\{f_n\}$ čvrst, onda je $S = AI$, a ako nije, onda je $\{S^{-1/2}f_n\}$ čvrst okvir i $A = 1$.

Niz $\{\tilde{f}_n\}$ je *dualni okvir* okvira $\{f_n\}$ ako je

$$f = \sum (f, \tilde{f}_n)f_n = \sum (f, f_n)\tilde{f}_n, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Iz (1) sledi da, ako je $\{f_n\}$ okvir, onda je i $\{S^{-1}f_n\}$ okvir, *kanonični dualni okvir.*

3.2. **Risove baze i okviri.** Polazna tačka teorije okvira je odnos okvira i baza. Od posebnog interesa su Risove baze koje se definišu kao slike ONB unitarnim preslikavanjima. Skup $\{f_n\}$ je *Risova baza* za $\mathcal{H}$ ako postoji ograničen invertibilni operator $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ i ONB $\{e_n\}$ za $\mathcal{H}$ tako da je $f_n = Ue_n$. Može se pokazati da je $\{f_n\}$ Risova baza za $\mathcal{H}$ ako i samo ako je $\{f_n\}$ potpun u $\mathcal{H}$ i postoje konstante $A, B > 0$ tako da važi

$$A \sum |c_n|^2 \leq \| \sum c_n f_n\|^2 \leq B \sum |c_n|^2.$$

za svaki konačan niz skalara $\{c_n\}$.

U formulaciji naredne teoreme koristi se pojam *biortogonalnog niza.* Nizovi $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$ su biortogonalni ako je $(f_n, g_m) = 0$ za $n \neq m$ i $(f_n, g_m) = 1$ za $n = m$. Jasno, ako je $\{f_n\}$ baza u $\mathcal{H}$ koja ima biortogonalni niz $\{g_n\}$ onda je $f = \sum (f, g_n)f_n = \sum (f, f_n)g_n$, za svako $f \in \mathcal{H}$.

Teorema 3.2. *Neka je $\{f_n\}$ okvir u $\mathcal{H}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

a) *$\{f_n\}$ je Risova baza za $\mathcal{H}$.*

b) $\{f_n\}$ *je egzaktan okvir.*
c) $\{f_n\}$ *ima jedinstven biortogonalan niz.*
d) $\{S^{-1}f_n\}$ *je biortogonalan niz nizu* $\{f_n\}$.
e) *Ako je* $\sum c_n f_n = 0$ *u* $\mathcal{H}$ *za neki niz* $\{c_n\}$ *iz* l^2, *onda je* $c_n = 0$ *za svaki indeks* n.

Napomena 3.3.
- *Deo* e) *prethodne teoreme pokazuje da koeficijenti u razvoju po okvirima koji nisu (Risove) baze nisu jedinstveno određeni. Uslov* e) *je jači od linearne nezavisnosti i naziva se* $\omega-$*nezavisnost.*
- *U svetlu prethodne teoreme, stiče se utisak da su okviri neka vrsta nadogradnje nad bazom. Međutim, postoje okviri čija nijedna potfamilija nije Risova baza. Na primer:*
$$\{e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \dots\}.$$
- *Na osnovu* b) *sledi da svaki okvir koji nije Risova baza, ostaje okvir kada se iz njega izbaci neki element. Proučavanje ove problematike je poznato poz nazivom* prekoračenje *okvira.*
- *Značajna razlika između okvira i Risovih baza je da je jezgro operatora sinteze* T *datog okvira u opštem slučaju netrivijalno (uporedi sa uslovom* e) *teoreme 3.2), što je ekvivalentno tvrdnji da je kodomen operatora* T^* *(zatvoren) pravi potprostor u* l^2.
- *U opštem slučaju, za razliku od Risovih baza, za dati okvir ne postoji bi-ortogonalni niz.*

3.3. **Neka pitanja teorije okvira.** Važi teorema *Naimark*-ovog tipa:

Teorema 3.4. *Svaki čvrst okvir u* $\mathcal{H}$ *je ortogonalna projekcija neke ortonormirane baze nekog Hilbertovog prostora* $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}'$.

Jedan od otvorenih problema je Fajhtingerova pretpostavka/tvrđenje da je svaki ograničen okvir konačna unija Risovih baznih nizova.

Okvir $\{f_n\}$ je ograničen ako je $0 < \inf_n \|f_n\| \leq \sup_n \|f_n\| < \infty$. Sa druge strane, Risov bazni niz u $\mathcal{H}$ je familija $\{g_n\}$ koja je Risova baza za zatvaranje skupa konačnih linearnih kombinacija svojih elemenata u $\mathcal{H}$.

Fajhtingerova pretpostavka je ekvivalentna Bourgain and Tzafririjevoj "Restricted-Invertibility" teoremi iz 1987. godine, a u radu [2] se pokazuje da je ovaj problem u tesnoj vezi sa Kadison-Singer-ovim problemom o C^* algebrama iz 1959. godine. Više o ovome se može pročitati na adresi: http://www.aimath.org/WWN/kadisonsinger/

Posebno interesantna oblast istraživanja je teorija okvira u prostorima koji nisu Hilbertovi. Na primer, okviri u Banahovim prostorima su proučavani u [11], a u Frešeovim prostorima u [19].

Poglavlje završavamo sa primenom u analizi signala kod analogno-digitalnih konvertora visoke preciznosti. Naime, signal se, nakon prolaska kroz "low-pass" filter, uniformno uzorkuje i kvantizuje, odnosno, u (konačnom) nizu koeficijenata $(f, S^{-1}f_k)$, $k = 1, \ldots, N$, uvek postoji greška kvantizacije nastala zaokruživanjem. Korisnik, dakle, prima signal "zagađen" šumom. Jedan od načina da se problem prevaziđe je povećanje broja sigurnih cifara, što se, u biti, oslanja na moć hardvera. Ako se greška kvantizacije modelira kao beli šum, dobija se rezultat koji govori da je u hardveru jednostavnije povećati broj uzoraka nego preciznost pri kvantizaciji. Time se dobija redudantnost, pa niz postaje niz koeficijenata okvira, videti [17, poglavlje 5.1.4].

4. Gaborovi okviri

U ovom poglavlju daje se konkretan primer okvira u $L^2(\mathbb{R})$ koji ilustruje bogatsvo matematičkih ideja i teškoće na koje nailazi apstraktna teorija u konkretnim realizacijama.

Osnovni operatori vremensko-frekvencijske analize su operatori translacije i modulacije:

$$T_x f(t) = f(t-x), \quad M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega \cdot t} f(t), \quad x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Operatori oblika $T_x M_\omega$ i $M_\omega T_x$ se zovu vremensko-frekvencijska pomeranja. Važi:

$$T_x M_\omega = e^{-2\pi i \omega \cdot x} M_\omega T_x.$$

U nastavku će se sa $L^2(\mathbb{R})$ označavati Hilbertov prostor kvadrat integrabilnih funkcija nad $\mathbb{R}$.

Definicija 4.1. *Za zadatu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$ i parametre mreže $a, b > 0$, skup vremensko-frekvencijskih pomeranja*

$$\mathcal{G}_{g,a,b} = \{g_{ak,bn}(x) = e^{2\pi i b n x} g(x - ak) = T_{ak} M_{bn} g, \quad k, n \in \mathbb{Z}\},$$

se zove Gaborov sistem.

Deneš Gabor je, u radu objavljenom 1946. godine, predložio upotrebu niza $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2/a^2}, a, 1/a}$ kao baznog sistema. Izbor Gausijana $2^{1/4} e^{-\pi x^2}$ je logičan jer je njegova Furijeova transformacija istog oblika, pa Gausijan vrši dobru lokalizaciju u vremensko-frekvencijskoj ravni. U vezi sa tim, Gausijan minimizuje *princip neodređenosti*, koji u jednom od svojih oblika glasi:

Teorema 4.2. *Ako $f \in L^2(\mathbb{R})$, onda za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ važi:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|^2. \tag{2}$$

Pri tome, jednakost važi ako i samo ako je f umnožak Gausove funkcije $e^{2\pi ib(x-a)}e^{-\pi(x-a)^2/c}$, za neke $a, b \in \mathbb{R}$ i $c > 0$.

Gaborov okvir u $L^2(\mathbb{R})$ je Gaborov sistem $\mathcal{G}_{g,a,b}$ koji je okvir u $L^2(\mathbb{R})$. Za odgovarajući operator okvira važi

$$Sf = \sum_{k,n\in\mathbb{Z}}\sum (f, T_{ak}M_{bn}g)T_{ak}M_{bn}g.$$

Dualni okvir Gaborovog okvira je takođe Gaborov okvir. Preciznije:

Propozicija 4.3. *Ako je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ Gaborov okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda postoji $\gamma \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{G}_{\gamma,a,b}$ Gaborov okvir koji je dualan okviru $\mathcal{G}_{g,a,b}$. Dakle,*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}}\sum (f, T_{ak}M_{bn}g)T_{ak}M_{bn}\gamma \\ &= \sum_{k,n\in\mathbb{Z}}\sum (f, T_{ak}M_{bn}\gamma)T_{ak}M_{bn}g, \end{aligned}$$

sa bezuslovnom konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$.

U dokazu se koristi činjenica da operator Gaborovog okvira komutira sa vremensko-frekvencijskim pomeranjima i definicija funkcije γ sa $\gamma = S^{-1}g$.

Osnovni pristup pitanju egzistencije Gaborovih okvira je u razumevanju operatora Gaborovog okvira, detalji se mogu naći u [12].

Očigledno, operator Gaborovog okvira zavisi od prozora g i parametara mreže a i b. Može se pokazati da važi $\lim_{(a,b)\to(0,0)}(ab)S^{-1}g = g$.

Najopštije pitanje u vezi sa Gaborovim sistemima je karakterizacija funkcija g i parametara a i b za koje je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ potpun u $L^2(\mathbb{R})$. Razumljivo, ovako postavljeno, pitanje je previše široko za konkretan/upotrebljiv odgovor. Čak i u slučaju Gaborovog sistema $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$, dakle sa fiksiranom funkcijom i parametrima, na odgovor se čekalo godinama nakon što je Fon Nojman (1932. godine) pretpostavio da je taj Gaborov sistem potpun u $L^2(\mathbb{R})$. Dokaz je objavljen 1971. godine od strane Bargmana sa saradnicima i, nezavisno od njih, Perelomova, a zainteresovanog čitaoca upućujemo na [10].

Teorema 4.4. *Skup funkcija $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ je potpun u $L^2(\mathbb{R})$. Štaviše, on ostaje potpun i kada se iz njega izbaci jedan element, ali ne i kada se izbace dva elementa.*

Skup parametara a i b za koje važi $\overline{\text{span}}\mathcal{G}_{g,a,b} = L^2(\mathbb{R})$ je usko povezan sa izborom funkcije g. Na primer, ako je nosač funkcije g u intervalu dužine d, onda je za potpunost Gaborovog sistema potrebno da važi

$a \leq d$. Slično, ako je nosač od $\hat{g}$ u intervalu dužine d, onda se na parametar modulacije b postavlja uslov $b \leq d$. Sa druge strane, bez obzira na izbor funkcije $g \in L^2(\mathbb{R})$, intuitivno je jasno da mreža $a\mathbb{Z}\times b\mathbb{Z}$ ne može da bude "retka". Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 4.5. *Ako je $ab > 1$ onda ne postoji $g \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\overline{\text{span}}\mathcal{G}_{g,a,b} = L^2(\mathbb{R})$.*

Prema tome, ako važe uslovi teoreme 4.5, $\mathcal{G}_{g,a,b}$ nije okvir.

Dokaz za $ab > 1$, $ab \in \mathbb{Q}$ je dala Dobeši eksplicitnom konstrukcijom funkcije $f \neq 0$ takve da, za zadatu funkciju $g \in L^2(\mathbb{R})$, važi $f \perp \mathcal{G}_{g,a,b}$, [5]. Dokaz za $ab > 1$, $ab \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je egzistencijalne prirode i zahteva dublju argumentaciju koja ne koristi aparat apstraktne harmonijske analize u vezi sa strukturom (reprezentacije) grupe generisane vremensko-frekvencijskim pomeranjima.

Iz teoreme 4.5 sledi da, ako postoji $g \in L^2(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je $ab \leq 1$. Ovaj rezultat je, međutim, lakše dokazati nego teoremu 4.5.

U slučaju $a = b = 1$ važi sledeće:

Teorema 4.6. *Ako je $\mathcal{G}_{g,1,1}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je $\int x^2|g(x)|^2dx = \infty$ ili je $\int \omega^2|g(\omega)|^2d\omega = \infty$.*

Teorema 4.6 je poseban slučaj Balian-Lou teoreme koja ima interesantnu istoriju, videti [5]. Iz teorema 4.4 i 4.6 sledi da potpun sistem $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ nije okvir u $L^2(\mathbb{R})$. U stvari, Jansen je, u nekoliko radova iz 1981. godine pokazao sledeće:

- $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},1,1}$ nije potpun u Švarcovom prostoru brzo opadajućih funkcija, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, u topologiji od $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- Postoji $f \in L^2(\mathbb{R})$ koja se ne može napisati u obliku $\sum c_{j,k}T_jM_ke^{-\pi x^2}$ sa konvergencijom u $L^2(\mathbb{R})$.
- Ipak svaka funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ se može napisati u obliku $\sum c_{j,k}T_jM_ke^{-\pi x^2}$, pri čemu red konvergira u prostoru distribucija sporog rasta, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Neka je $\chi_{[0,1]}$ karakteristična funkcija jediničog intervala. Skup tačaka $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ za koje je $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$ je veoma neobičan podskup skupa $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ nazvan Jansenova kravata. Taj skup nije otvoren; za mnoge tačke (a,b) koje generišu okvir, mogu se naći tačke (a',b') u proizvoljnoj okolini tačke (a,b) takve da $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},a',b'}$ nije okvir.

Skup $\mathcal{G}_{\chi_{[0,1]},1,1}$ je ONB u $L^2(\mathbb{R})$. Na osnovu teoreme 4.6 ova ONB ima lošu lokalizaciju u frekvencijskom domenu. Zaista, Furijeova transformacija funkcije $\chi_{[0,1]}$ je $\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}$, čija "energija" nije lokalizovana.

Slika 2. A. J. E. M. Janssen i njegova "kravata".

Drugim rečima, cilj lokalizacije je približavanje jednakosti u principu neodređenosti, a iz teoreme 4.6 sledi da leva strana nejednakosti (2) ima najgoru moguću vrednost: $+\infty$. Alternativni pristup prevazilaženju ograničenja nametnutih teoremom Balian-Lou je upotreba Vilsonovih baza, što predstavlja posebno polje proučavanja u okviru vremensko-frekvencijske analize.

Perturbacija tačaka (a, b) za zadati Gaborov sistem nije lokalnog karaktera, u smislu da generiše "velika" pomeranja tačaka (ak, bl) za velike vrednosti $k, l \in \mathbb{Z}$. Za $ab < 1$ i Gausijan $e^{-\pi x^2}$, $\mathcal{G}_{e^{-\pi x^2},a,b}$ je uvek okvir u $L^2(\mathbb{R})$. Male perturbacije parametara a i b u ovom slučaju neće narušiti svojstvo okvira. Takođe, za svaki perturbovani Gaborov okvir, sa $g(x) = e^{-\pi x^2}$, dualni prozor je brzo opadajuća funkcija.

Na ovom mestu postavlja se pitanje određivanja klase funkcija kod kojih će lokalne perturbacije parametara a i b sačuvati svojstvo okvira, ali tako da dualni prozori neprekidno zavise od tih perturbacija.

Detaljan odgovor je izložen u radu [9] i oslanja se na Jansenovu reprezentaciju operatora okvira, neprekidnost nekomutativne (savijene/uvrnute) konvolucije i upotrebu Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji. Sledeći rezultat, u vezi sa navedenim, je dokazan u radu [8] za $ab \in \mathbb{Q}$, a opšti slučaj je dat u [13].

Najpre treba da se definiše prostor S_0, poznat kao Fajhtingerova algebra, najznačajniji prostor vremensko-frekvencijske analize. Standardna definicija prostora S_0 polazi od kratkotrajne Furijeove transformacije, koja, u stvari, predstavlja neprekidnu verziju Gaborovog sistema.

Neka je dat prozor $g \in L^2(\mathbb{R})$. Kratkotrajna Furijeova transformacija signala $f \in L^2(\mathbb{R})$ je definisana sa

$$V_g f(x,\xi) = (f, M_\xi T_x g) = \int e^{-2\pi it\xi}\overline{g(t-x)}f(t)dt, \quad x,\xi \in \mathbb{R}.$$

Prostor S_0 čine funkcije f iz $L^2(\mathbb{R})$ za koje je $V_g f \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, odnosno apsolutno integrabilna funkcija po obe promenjive.

Teorema 4.7. *Neka je $ab > 0$. Ako je $g \in S_0$ takva da je $\mathcal{G}_{g,a,b}$ okvir u $L^2(\mathbb{R})$, onda je operator okvira S bijekcija S_0 na samog sebe. Posebno, $S^{-1}g \in S_0$.*

Suština dokaza je proučavanje nekomutativne konvolucije, što je za $ab \in \mathbb{Q}$ moguće izvesti aparatom apstraktne harmonijske analize. U opštem slučaju, u radu [13] je iskorišćena nekomutativna verzija klasičnog rezultata Norberta Vinera, poznatijeg kao Vinerova lema:

Ako je f neprekidna, nenula, periodična funkcija na $\mathbb{R}$ čiji Furijeov red apsolutno konvergira, onda i Furijeov red funkcije $1/f$ apsolutno konvergira.

Jedna formulacija Vinerove leme je data sa: Ako je $c \in l^1(\mathbb{Z})$ i ako je $a \mapsto c * a$ invertibilan operator na $l^2(\mathbb{Z})$, onda je c invertibilan u konvolucionoj algebri $l^1(\mathbb{Z})$.

Detalji istorijskog razvoja problema gustine, odnosno dizajna mreže koja Gaborov sistem čini okvirom, nezavisno od izbora prozora g, izloženi su u [15].

Gaborovi okviri su primenjeni u proučavanju pseudodiferencijalnih operatora u radu [18] a u radu [16] je data karakterizacija talasnog fronta pomoću koeficijenata razvoja po Gaborovim okvirima.

5. Originalna definicija

U ovom poglavlju je data originalna definicija okvira iz [7]. Zanimljivo je da je šire interesovanje za teoriju okvira poraslo tek nakon izlaska knjige [5], četrdeset godina nakon uvođenja originalne definicije.

Definicija 5.1. *Skup funkcija $\{\exp\{i\lambda_n t\}\}$ je okvir nad $(-\gamma,\gamma)$ ako postoje pozitivne konstante A i B koje zavise samo od γ tako da važi*

$$A \le \frac{\frac{1}{2\pi}\sum_n \left|\int_{-\gamma}^{\gamma} g(t)e^{i\lambda_n t}dt\right|^2}{\int_{-\gamma}^{\gamma}|g(t)|^2dt} \le B,$$

za svaku funkciju $g(t) \in L^2(-\gamma, \gamma)$.

Na istom mestu dokazane su sledeće teoreme.

Teorema 5.2. *Ako je* $\{\lambda_n\}$ *niz realnih ili kompleksnih brojeva uniformne gustine* d*, onda je* $\{\exp(i\lambda_n t)\}$ *okvir nad* $(-\gamma, \gamma)$ *za* $0 < \gamma < \pi d$.

Pri tome, niz realnih ili kompleksnih brojeva $\{\lambda_n\}$ ima *uniformnu gustinu* d, $d > 0$, ako postoje konstante L i δ tako da važi

$$|\lambda_n - \frac{n}{d}| \leq L, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |\lambda_n - \lambda_m| \geq \delta > 0, \quad n \neq m.$$

Teorema 5.3. *Neka je* $\{\lambda_n\}$ *niz uniformne gustine* d *i neka je* $0 < \gamma < \pi d$. *Ako je* $f(z)$ *cela funkcija,* $|f(z)| \leq C \exp\{\gamma |z|\}$ *(za neko* $C > 0$*) i* $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$*, onda je*

$$A \leq \frac{\sum_n |f(\lambda_n)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \leq B,$$

gde A *i* B *zavise samo od* γ *i* $\{\lambda_n\}$.

References

[1] J. Kovačević, and A. Chebira, *An Introduction to Frames.* Foundations and Trends in Signal Processing, 2 (1):1–94, 2008.

[2] P. Casazza, G. Kutyniok, D. Speegle, and J. C. Tremain, *A decomposition theorem for frames and the Feichtinger conjecture.* Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2043-2053.

[3] O. Christensen, *Frames, Riesz bases, and discrete Gabor/wavelet expansions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 38(3):273–291, 2001.

[4] E. Cordero, H. G. Feichtinger, and F. Luef, *Banach Gelfand triples for Gabor analysis*, In Pseudo-differential operators, volume 1949 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1–33, 2008.

[5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, volume 61 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[6] G. Don, K. Muir, G. Volk, and J. Walker, *Music: Broken Symmetry, Geometry, and Complexity*, Notices of the AMS, January 2010.

[7] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Am. Math. Soc., 72:341–366, 1952.

[8] H. G. Feichtinger, K. Gröchenig, *Gabor frames and time-frequency analysis of distributions*, J. Funct. Anal. 146: 464–495, 1997.

[9] H. G. Feichtinger and N. Kaiblinger, *Varying the time-frequency lattice of Gabor frames*, Trans. Amer. Math. Soc., 356(5):2001–2023, 2004.

[10] G. B. Folland, *The abstruse meets the applicable: Some aspects of time-frequency analysis*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 116:121–136, 2006.

[11] K. Gröchenig, *Describing functions: frames versus atomic decompositions*, Monatshefte für Mathematik, 112:1–41, 1991.

[12] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, 2001.

[13] K. Gröchenig and M. Leinert, *Wiener's lemma for twisted convolution and Gabor frames*, J. Amer. Math. Soc., 17:1–18, 2004.

[14] D. Han, K. Kornelson, D. Larson, and E. Weber, *Frames for Undergraduates.*, volume 40 of Student Mathematical Library, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
[15] C. Heil, *History and evolution of the density theorem for Gabor frames*, J. Fourier Anal. Appl., 13(2):113–166, 2007.
[16] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov and J. Toft, *Discrete Wave-front sets of Fourier Lebesgue and modulation space types*, preprint, arXiv:0909.1237v1
[17] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.
[18] S. Pilipovic and N. Teofanov *Pseudodifferential operators on ultra-modulation spaces*, J. Funct. Anal. 208:194-228, 2004.
[19] S. Pilipovic, D. Stoeva and N.Teofanov, *An introduction to frames for Frechet spaces*, Bull. de l'Academie Serbe des Sci. et des Arts, 32:69–84, 2007.

Departman za matematiku i informatiku, PMF, Univerzitet u Novom Sadu
E-mail address: nenad.teofanov@dmi.uns.ac.rs