Talasići, sentimentalna istorija
Nenad Teofanov[1]

Najavljujući sastanak američkog matematičkog društva pod nazivom "Matematički izazovi 21. veka", njegov predsednik Feliks Brauder je izrazio želju da se predavanjima na tom sastanku obuhvate odredjene oblasti savremene matematike. Brauder je listu tih oblasti sastavio motivisan činjenicom da smo svedoci zadivljujućeg porasta uloge prefinjenih matematičkih istraživanja u rešavanju najvećih problema u naukama i društvu[2]. Na toj listi se teorija malih talasa – talasića *(engl. wavelets)* zajedno sa primenama harmonijske analize našla na prvom mestu. U ovom predavanju pokušaćemo da, prikazujući kroz istorijsku prizmu nastanak i razvoj teorije talasića, osvetlimo razloge njene velike popularnosti.

Priču počinjemo drevnim istraživanjima Žozefa Furijea[3] koji je u eseju "Analitička teorija toplote" objavljenom 1822. godine razvio teoriju koju danas zovemo Furijeova analiza. Suština ove teorije je da se neka komplikovana pojava shvati pomoću jednostavnih komponenti od kojih je sastavljena. Preciznije, ideja je da neku funkciju predstavimo kao sumu sinusnih i kosinusnih talasa raznih frekvencija i amplituda. Znajući ponašanje sinusnih i kosinusnih komponenti funcije možemo, principijelno, dobiti informaciju o osobinama same funkcije. Danas je, zbog široke lepeze primena, Furijeova analiza nezaobilazni kurs na tehničkim fakultetima. Sinusne i kosinusne funkcije raznih amplituda i frekvencija čine *trigonometrijske sisteme*, koji su primeri ortonormiranih baza prostora funkcija čiji su kvadrati integrabilni nad nekim konačnim intervalom. Kao što smo napomenuli, jednom objektu f pridružujemo niz brojeva (koeficijenata) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$, koji se računaju integracijom proizvoda signala f i odgovarajuće bazne funkcije. Ako posmatramo trigonometrijski sistem, te koeficijente zovemo Furijeovi koeficijenti. S obzirom da elementi trigonometrijskih sistema neprigušeno osciluju nad skupom realnih brojeva, mala promena u signalu f za posledicu ima promenu *svih* koeficijenata. Ili, ako imamo trenutni zvučni signal u vremenskom intervalu od, recimo, par minuta, za njegovu "rekonstrukciju" potrebno je poznavanje svih Furijeovih koeficijenata, isto kao i da je u tih par minuta sviran deo nekog gudačkog kvarteta. Jednom rečju, Furijeova analiza

[1]predavanje održano na seminaru iz istorije matematike, 22.XI 2001.
[2]Notices of the AMS, Vol.47, No.3
[3]Joseph Fourier (1768-1830)- francuski matematičar

nije najpogodnija za ispitivanje lokalnih osobina objekata, koje mogu biti od značaja u primenama. Od predloga Denisa Gabora[4], iznetog u radu "Teorija komunikacija" 1946. godine, do pojave talasića, početkom osamdesetih godina prošlog veka, beležimo nekoliko medjusobno nezavisnih pokušaja da se rečeni nedostatak prevazidje. Videćemo da je najznačajnija uloga teorije talasića u savremenim matematičkim istraživanjima povezivanje srodnih ideja iz različitih oblasti nauke, odnosno upotreba zajedničkog jezika za, na prvi pogled nepovezane, teorije i tehnike koje su se koristile i pre uvodjenja pojma *vejvlet* [5].

Prvi radovi teorije talasića posledica su istraživajna koje je sprovodio francuski geofizičar, inženjer, Žan Morle (Jean Morlet) pri ispitivanju nivoa taloga zemljišta. Morle je radio za francusko naftno preduzeće "Elf Aquitaine", a problem se sastojao u odredjivanju nivoa različitih slojeva zemlje, na osnovu refleksije akustičnih talasa, emitovanih sa površine. Različiti slojevi, naime, trenutno reflektuju različite frekvencije. Morle je pokušao, bez uspeha, da reši problem koristeći tehniku lokalizacije koju je predložio Gabor. Taj neuspeh ga je praktično primorao da "izmisli" mali talas. Matematički rečeno, umesto *modulacija i translacija* Gausove funcije $2^{1/4}e^{-\pi t^2}$, Morle je koristio *dilatacije i translacije* njenog drugog izvoda. Napomenimo da su najbolji eksperimentalni rezultati dobijeni kada su dilatacije bile stepeni broja 2. Te 1982. godine, u pokušaju da svoje eksperimentalne rezultate kruniše ozbiljnom teorijskom podlogom, Morle se obraća slavnom teorijskom fizičaru (i poligloti) Aleksu Grosmanu (Alex Grossmann) iz Centra za teorijsku fiziku u Marseju. Grosman je u rezultatima Morlea video diskretnu verziju integralne transformacije, kasnije nazvane vejvlet transformacija, koja je u tesnoj vezi sa teorijom *koherentnih stanja* kvantne fizike. Preciznije, preslikavanje koje osnovnom talasiću (na primer drugom izvodu Gausijana) dodeljuje njegove translacije i dilatacije je unitarna nesvodljiva reprezentacija jedne afine grupe nad odredjenim prostorom funkcija, čime je teorijski objašnjena i dokazana mogućnost stabilne dekompozicije i rekonstrukcije funkcije pomoću njenih malotalasnih koeficijenata. Taj rezultat, objavljen 1984. godine, smatra se prvim "pravim" radom teorije talasića. Na ovom mestu treba reći da je pristup teoriji talasića sa strane apstraktne harmonijske analize kompliko-

[4]Denis Gabor (1900 - 1979) - madjarski i engleski matematičar, dobitnik Nobelove nagrade

[5]U preglednom članku iz Bull. of the AMS, April 1993, Iv Mejer je naveo čak 16 "predaka" teorije talasića

vaniji, ali i opštiji; njime je moguće obuhvatiti istovremeno teoriju talasića i Gaborovu analizu[6]. Grosman je pretpostavio i da Morleovi talasići predstavljaju okvir *(engl. frame)* za neki Hilbertov prostor, što je 1986. godine dokazala Ingrid Dobši[7].

Godine 1985. teoriju talasića najzad otkrivaju i matematičari. U pariskoj Ekol Politeknik Žan Lesko u neformalnom razgovoru skreće pažnju Iva Mejera (Ives Meyer) na rezultate Grosmana i Morlea. Mejer, jedan od najvećih savremenih matematičara, u Grosman-Morleovoj formuli za rekonstrukciju signala, prepoznaje Kalderonov[8] identitet. Taj rezultat harmonijske analize, objavljen 1964. godine, intenzivno se koristio u takozvanoj atomskoj dekompoziciji raznih Banahovh prostora distribucija. Mejer je, po sopstvenim rečima, ušao u prvi voz za Marsej i taj trenutak bismo mogli označiti kao početak matematičkog zasnivanja teorije talasića.

S jeseni 1985. godine i u februaru 1986. godine Mejer je najavio konstrukciju ortonormirane baze prostora kvadrat integrabilnih funkcija koju čine funkcije $\psi_{j,k}$ dobijene translacijama i dilatacijama jedne, pogodno izabrane funkcije ψ :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbf{Z},$$

koje imaju zadovoljavajuću lokalizaciju u faznom prostoru. U stvari, Mejer je pokušao da pokaže kako takva baza ne postoji. Njegovom konstrukcijom, koja se oslanja na Litlvud-Pelijevu teoriju i teoriju Kalderon-Zigmundovih singularnih integralnih operatora, otkrivene su ne samo baze prostora kvadrat integrabilnih funkcija, nego i bezuslovne baze široke klase Banahovih prostora, čime je teorija talasića otvorila svoje poglavlje u velikoj knjizi harmonijske analize. Pojasnimo na slikovit način šta translacije i dilatacije jedne funkcije predstavljaju. Zamislimo da osnovni vejvlet predstavlja četvrtinu note C. Njegove translacije predstavljaju istu notu odsviranu u odgovarajućim vremenskim trenutcima. Dilatacija za faktor 2 predstavlja osminu note C, za oktavu više od polazne note, a dilatacija za faktor 2^{-1} je polovina note C u jednoj oktavi niže s obzirom na polaznu notu.

Sledeći paragraf ispisao je Stefan Mala (Stéphane Mallat) koji je 1986. godine u Filadelfiji pripremao doktorsku disertaciju. Njega je Mejerova konstrukcija podsetila na algoritme korišćene u signalnoj analizi. Uvodjenjem

[6]Pogledati pregledni članak C. Heil, and D. Walnut u SIAM Review, December 1989
[7]Ingrid Daubechies, belgijska matematičarka
[8]Alberto Pedro Calderón (1920 - 1998), argentinski matematičar

pomoćne funkcije φ, koja na odredjeni način generiše malotalasni sistem funkcija, Mala je definisao pojam *multirezolucijske analize* (MRA). Grubo govoreći, MRA se sastoji od niza ugnježdjenih potprostora prostora kvadrat integrabilnih funkcija. Kretanje uz tu lestvicu potprostora može se shvatiti kao dodavanje detalja vizuelnom signalu, odnosno kao izoštravanje slike. Funkcija φ koja generiše "prvu lestvicu" MRA prozvana je, u šali, "majka talasića", a funcija ψ koja genreriše prostor izmedju prve i druge lestvice, prozvana je "ocem talasića". Ostale bazne funkcije $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, bile su "kćeri talasića". Danas se, naravno, ti izrazi ne koriste; funkcija φ zove se skalna funkcija, a ψ je jednostavno talasić.

Konačno, prva etapa u razvoju teorije talasića, okončana je spektakularnim rezultatom Ingrid Dobši, objavljenom 1988. godine. Ona je, naime, konstruisala malotalasnu ortonormiranu bazu prostora kvadrat integrabilnih funkcija, u kojoj bazne funkcije imaju kompaktan nosač i proizvoljnu glatkost. Podsetimo se, kompaktan nosač znači da je funkcija identički jednaka nuli izvan nekog ograničenog intervala, pa se, na primer, odgovarajući nesvojstveni integrali svode na odredjene integrale. Dobši talasići su vrlo brzo dobili mesto u familiji specijalnih funkcija navedenih u poznatoj knjizi "Numerički recepti". Najznačajnija posledica razvoja teorije talasića do 1990. godine je uspostavljanje zajedničkog matematičkog jezika izmedju raznih disciplina primenjene i teorijske matematike.

Početkom devedesetih godina prošlog veka, pioniri teorije malih talasa. Ingrid Dobši i Iv Mejer objavili su monografije koje se smatraju osnovnim referencama teorije talasića. Za knjigu "Deset lekcija o vejvletima"[9], Ingrid Dobši (američki akademik od 1993. godine) je dobila Stilovu nagradu 1994. godine, a Rut Litl Sater nagradu 1997. godine. Prošle, 2000.godine postala je četvrti naučnik koji je dobio nagradu američke nacionalne akademije nauka (NAS).[10] Indrid Dobši trenutno radi na Prinstonu. Mejerova knjiga, trotomno delo "Talasići i operatori"[11] svakako je najznačajnija literatura teorije talasića za teorijske matematičare.

Veoma uopšteno govoreći, dokazano je da su malotalasni koeficijenti moćno sredstvo za analizu i sintezu širokog spektra prostora i distribucija. Posebno, numeričke osobine koeficijenata odražavaju glatkost odgovarajuće funkcije.

[9] Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia 1992.

[10] U iznosu od 5000 američkih dolara. Njen prethodnik je 1996. godine bio Endrju Vajls, koji je dokazao poslednju Fermaovu teoremu.

[11] Ondelettes et Opérateurs, Hermann 1990.

Jednim od najvećih uspeha u primeni algoritama zasnovanih na teoriji talasića s početka devedesetih godina prošlog veka smatra se prihvatanje njihove upotrebe u kompresiji snimaka otisaka prstiju koji čine kartoteku američkog federalnog biroa za istraživanja (FBI). FBI dnevno dobija 30 do 40 000 zahteva za identifikaciju otisaka, koji se traže u kartoteci koja sadrži preko 200 000 000 otisaka. Otisci se skladište kao kompjuterski fajlovi. Pri rezoluciji od 500 piksela po inču[12] prosečna kartica nosi 10 megabajta podataka. Prenos potrebne količine dnevnih podataka preko modema trajao bi pod navedenim uslovima satima. Vejvlet standard vrši kompresiju podataka o otiscima prstiju, pri čemu se ne narušava specifičnost otiska, u razmeri 20:1, odnosno fajl od 10 megabajta se komprimuje na 500 kilobajta.

Sledeći primer primene talasića u otklanjanju šuma kod audio signala je možda spektakularniji od prethodnog. Ronald Coifman, koautor u trećem tomu Mejerove knjige, je sa timom saradnika 1993. godine otklonio šum snimka Johanesa Bramsa[13], koji je "uživo" 1889. godine izvodio jedan od svojih madjarskih plesova. Snimak je zabeležen na voštanom cilindru, koji se delimično istopio. Koristeći malotalasne tehnike Coifman je uspeo da "oživi" ovaj praktično neupotrebljiv snimak. Primene talasića pri uklanjanju šuma nisu ograničene samo na audio signale, nego i na uklanjanje belog šuma, na primer sa fotografija snimljenih pomoću satelita.

Do sredine devedesetih godina prošlog veka, teorija talasića je postala značajno oružje u raznim granama nauke i tehnike, sa uveliko razvijenom softverskom podrškom. Autori članaka objavljenog u inženjersko - informatičarskom časopisu IEEE Spektrum[14] su kao prednosti upotrebe talasića u algoritmima nabrojali brzinu i efikasnost, dobijanje retkih matrica i kompresiju podataka, brzinu numeričkih izračunavanja, uklanjanje šuma. U posebnom prilogu naveden je spisak programskih paketa sa opisom mogućih primena i načinom nabavljanja.

Godine 1998. objavljena je knjiga Stefan Malaa "Malotalasni izlet u obradu signala"[15] kojom se ustanovljava vejvlet analiza kao sastavni deo obrade signala. U knjizi, koja ima blizu 600 stranica, navedeni su vejvlet programski paketi sa posebnim osvrtom na rutine za Matlab. Na predavanju koje je te godine održao na medjunarodnom kongresu matematičara,

[12] jedan inč je 26 milimetara

[13] Johannes Brahms (1833-1897), nemački kompozitor

[14] IEEE Spectrum, str. 26-35 October 1996.

[15] A Wavelet tour of signal processing, Academic Press, 1998.

u Berlinu, Mala je najavio dalje perspektive vejvlet analize u obradi signala. Dve godine kasnije Iv Mejer je, na plenarnom predavanju u okviru Kongresa evropskih matematičara u Barseloni, naveo da se uklanjanjem belog šuma u video signalima koristeći vejvlete, gubi informacija o strukturi snimljenih objekata. Ovi primeri govore da je teorija talasića privlačna disciplina u kojoj je moguće dati originalan naučni doprinos. Mejer je svoje predavanje počeo citiranjem reklama kojima nekoliko kompanija navodi primenu talasića kao savremenog matematičkog aparata u svojim proizvodima. Posebno ističemo da je nedavno usvojeni JPEG-2000[16] standard za kompresiju slike zasnovan na upotrebi vejvlet koeficijenata. Više detalja nalazi se na veb prezentaciji profesora Iv Mejera.

Mejer smatra da je možda najznačajnija osobina teorije talasića jednostavnost njenih osnovnih pojmova i konstrukcija, što je čini privlačnom za mlade naučnike. Odnosno, Kalderonov identitet je jednostavna činjenica u teoriji talasića, a teško razumljiva jednakost ako čitamo originalan Kalderonov rad. Ili, da još jednom citiramo Mejera, Antoni Zigmund[17] bi se veoma iznenadio kada bi čuo ariju Mocartove "Čarobne frule", dobijenu pomoću atomske dekompozicije, tehnike korišćene u harmonijskoj analizi od šezdesetih godina prošlog veka. U muzici ju je upotrebio slavni francuski dirigent i kompozitor Pjer Bulez[18], direktor IRCAM[19], sa saradnicima.

[16] JPEG je skraćenica za The Joint Photographic Experts group, grupa industrijskih eksperata oformljena u cilju razvijanja svetskog standarda

[17] A. Zygmund (1900 -1992) poljski i američki matematičar, autor čuvene knjige "Trigonometrijski redovi"

[18] Pierre Boulez, rodjen 1925. godine

[19] Institut de Recherches Coordonnées Acoustique-Musique, u slobodnom prevodu Institut za koordiniranje akustičko-muzičkih istraživanja