

Klasični metod

Klasični metod se zasniva na pretpostavkama o diferencijabilnosti posmatrane funkcionele. Podsetimo se, preslikavanje $J : U \rightarrow \mathbf{R}$, $\emptyset \neq U \subset \mathbf{R}^n$, je diferencijabilno u tački $u \in U^\circ$ ako postoji vektor $v \in \mathbf{R}^n$ sa osobinom

$$\Delta J(u) := J(u+h) - J(u) = \langle v, h \rangle + o_u(h),$$

pri čemu važi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_u(h)}{\|h\|} = 0$. Jasno, vektor h pripada nekoj okolini nule, tako da je $u+h \in U$. Za fiksirano h broj $\langle v, h \rangle$ zove se *diferencijal* funkcije J u tački u koji odgovara priraštaju h , a koji ćemo označavati sa $dJ(u)$. Vektor v ćemo označavati sa $J'(u)$. On se zove gradijent funkcije J u tački u i može se pokazati da je

$$J'(u) = \left(\frac{\partial J(u)}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial J(u)}{\partial u^n} \right),$$

gde je $\frac{\partial J(u)}{\partial u^k} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{J(u + \alpha e_k) - J(u)}{\alpha}$, e_k je vektor čije su koordinate, osim k -te jednake nuli, a k -ta koordinata vektora e_k jednaka je sa 1, $k = 1, \dots, n$. *Prvi izvod* funkcije J u tački $u \in U^\circ$ je linearno preslikavanje koje vektoru h dodeljuje vrednost $\langle J'(u), h \rangle$. Naravno, iz diferencijabilnosti funkcije J u tački u sledi njena neprekidnost u toj tački.

Napomena. Za razliku od funkcija jedne realne promenljive, postojanje parcijlnih izvoda funkcije J u nekoj tački nije dovoljan uslov za neprekidnost funkcije u toj tački. Dovoljan uslov za neprekidnost u tački je neprekidnost svih parcijalnih izvoda u toj tački. Što se tiče diferencijabilnosti, iz neprekidnosti parcijalnih izvoda u tački u sledi njena diferencijabilnost u toj tački. Ovaj uslov, međjutim, nije i potreban. Postoje primeri funkcija diferencijabilnih u nekoj tački, čiji parcijalni izvodi nisu svi neprekidni u toj tački.

Podsetimo se, kvadratna forma je funkcija $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u^i u^j$ promenljive $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbf{R}^n$ koja je jednoznačno određena simetričnom matricom

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \{a_{i,j}\}.$$

Ako označimo sa Au vektor kolonu sa koordinatama $(Au)^i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}u^j$, $i = 1, \dots, n$. kvadratnu formu možemo zapisati u obliku $\langle Au, u \rangle$.

Definicija 1 *Neka je J funkcija definisana u nekoj okolini tačke $u \in \mathbf{R}^n$. Kažemo da je J dva puta diferencijabilna u tački u ako, zajedno sa gradijentom $J'(u)$, postoji simetrična matrica $J''(u)$ reda $n \times n$ takva da se priraštaj funkcije J u tački u može predstaviti u obliku*

$$(1) \quad J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u)h, h \rangle + o_u(h),$$

gde je $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_u(h)}{\|h\|^2} = 0$.

Za dato h (jasno, $u+h$ pripada okolini tačke u na kojoj je J definisana) veličinu $d^2J(u) = \langle J''(u)h, h \rangle$ zovemo drugi diferencijal funkcije J u tački u koji odgovara priraštaju h . Drugi izvod je bilinearно preslikavanje (kvadratna forma) određeno matricom drugog izvoda $J''(u)$. Može se pokazati da je

$$J''(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J(u)}{\partial (u^1)^2} & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^1 \partial u^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^1 \partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^n \partial u^1} & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^n \partial u^2} & \cdots & \frac{\partial^2 J(u)}{\partial u^n \partial u^n} \end{pmatrix}.$$

Klasični metod traženja ekstremnih vrednosti se zasniva na pretpostavkama o diferencijabilnosti posmatrane funkcije. Podsetimo se načina rešavanja problema određivanja bezuslovnog ekstrema na \mathbf{R}^n . Neka je J diferencijabilna na \mathbf{R}^n i neka se traže njene ekstremne vrednosti nad čitavim \mathbf{R}^n (zato kažemo da se traži bezuslovni ekstrem). Ekstremne tačke tada mogu biti samo one tačke za koje važi $J'(u) = 0$, što možemo pisati u obliku sistema

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sve taške koje ispunjavaje ovaj uslov zovu se stacionarne tačke funkcije J na \mathbf{R}^n . Ako je J dva puta diferencijabilna u nekoj okolini stacionarne tačke v i ako su svi parcijalni izvodi drugog reda te funkcije neprekidni po v onda važi

- a) Ako je $\langle J''(v)h, h \rangle > 0$ za sve $h \neq 0$ takve da $v+h$ pripada posmatranoj okolini tačke v onda je v tačka lokalnog minimuma funkcije J nad \mathbf{R}^n . (Drugim rečima, kvadratna forma $\langle J''(v)h, h \rangle$ je pozitivno definitna. Podsetimo se, potreban i dovoljan uslov za pozitivnu definitnost je pozitivnost svih glavnih minora matrice $J''(v)$. Za negativnu definitnost, taj uslov je dat sa $(-1)^k J''_k(v) > 0$, gde su sa $J''_k(v)$, $k = 1, \dots, n$ označeni glavni minori matrice $J''(v)$.)
- b) Ako je $\langle J''(v)h, h \rangle < 0$ za sve $h \neq 0$ takve da $v+h$ pripada posmatranoj okolini tačke v onda je v tačka lokalnog maksimuma funkcije J nad \mathbf{R}^n .
- c) Ako $\langle J''(v)h, h \rangle$ uzima i pozitivne i negativne vrednosti za različite izbore vektora h onda v nije ekstremna tačka posmatrane funkcije.

Primeri

- Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $\|x\|^2$, $x \in \mathbf{R}^n$, i funkcije $\|x\|$, $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.
- (ispitni) Dato je m tačaka u \mathbf{R}^n . Naći tačku $u \in \mathbf{R}^n$ čija je suma kvadrata rastojanja od datih tačaka minimalna.
- (ispitni) Neka je $J(u) = \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle$, $x \in \mathbf{R}^n$. Formulirati potreban i dovoljan uslov za ekstrem funkcionele J na \mathbf{R}^n ako je A simetrična matrica, a b fiksiran zadati vektor. (Napomena: u ovom slučaju može se koristiti jedinstvenost gradijenta i matrice drugog izvoda.)
- (ispitni) Data je funkcionala $f(x_1, x_2) = x_1^2 - \sin x_2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. Odrediti njene ekstremne vrednosti.

Formule konačnog priraštaja

U ovoj lekciji navodimo formule konačnog priraštaja za funkcije više realnih promenljivih. Njih ćemo intenzivno koristiti pri dokazivanju teorema konveksne analize.

Definicija 2 Funkcija J je neprekidno diferencijabilna ili glatka na skupu $U \in \mathbf{R}^n$ ako je diferencijabilna na U i pri tome

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|J'(u+h) - J'(u)\| = 0, \quad \forall u, u+h \in U.$$

Klasu glatkih funkcija nad skupom U ćemo označavati $C^1(U)$.

Definicija 3 Funkcija J je dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $U \in \mathbf{R}^n$ ako je dva put diferencijabilna na U i pri tome

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|J'(u+h) - J'(u)\| = 0, \quad \forall u, u+h \in U.$$

Klasu ovih funkcija ćemo označavati $C^2(U)$.

U prvoj definiciji norma se odnosi na normu vektora - gradijenta, a u drugoj definiciji se posmatra norma matrice drugog izvoda ($\|A\| = \sup_{\|e\|=1} \|Ae\|$).

Pretpostavimo da je J definisana na U . Neka $u, u+h \in U$, i neka $u+th \in U$ za sve $t \in (0, 1)$ (ovaj uslov je naravno ispunjen ako je U konveksan skup). Tada, za fiksirano u i $u+h$ možemo posmatrati funkciju $f(t) = J(u+th)$ kao funkciju jedne realne promenljive $t \in [0, 1]$. Ako je $J \in C^k(U)$, $k = 1, 2$, onda je $f \in C^k([0, 1])$, $k = 1, 2$ pri čemu važi

$$(2) \quad f'(t) = \langle J'(u+th), h \rangle, \quad f''(t) = \langle J''(u+th)h, h \rangle.$$

Ovo sledi iz jednakosti (1).

Podsetimo se, teoreme srednje vrednosti za f glase

$$f(t) - f(0) = f'(\theta_1 t)t = \int_0^t f'(\tau)d\tau = f'(0)t + \frac{1}{2}f''(\theta_2 t)t^2,$$

$$f'(t) - f'(0) = f''(\theta_3 t)t, \quad \text{za neke } 0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1.$$

Ako u ovim formulama stavimo $t = 1$ i iskoristimo (2) dobijamo formule konačnog priraštaja funkcije J :

$$(3) \quad J(u+h) - J(u) = \langle J'(u+\theta_1 h), h \rangle = \int_0^1 \langle J'(u+\tau h), h \rangle d\tau$$

$$(4) \quad J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle + \frac{1}{2} \langle J''(u+\theta_2 h)h, h \rangle$$

$$(5) \quad \langle J'(u+h) - J'(u), h \rangle = \langle J''(u+\theta_3 h)h, h \rangle$$

za neke $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq 1$.

Dalje, kako je $\frac{d}{dt} J'(u+th) = J''(u+th)$ $0 \leq t \leq 1$, integracijom po t na $[0, 1]$ dobijamo

$$J'(u+h) - J'(u) = \int_0^1 J''(u+th)h dt = \left(\int_0^1 J''(u+th) dt \right) h.$$

Definicija 4 Neka $J \in C^1(U)$. Kažemo da gradijent J' funkcije J ispunjava uslov Lipšica na skupu U sa konstantom $L \geq 0$ ako važi

$$\|J'(u) - J'(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad u, v \in U.$$

Klasu ovih funkcija ćemo označavati sa $C^{1,1}(U)$.

Lema 1 Neka je U koveksan skup i neka $J \in C^{1,1}(U)$. Tada važi

$$|J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v \rangle| \leq L \frac{\|u - v\|^2}{2}, \quad \forall u, v \in U.$$

Dokaz Iz formule (3) sledi

$$J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v \rangle = \int_0^1 \langle J'(u + \tau(u - v)) - J'(u), u - v \rangle d\tau,$$

a iz Koši -Švarcove nejednakosti $|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$, $a, b \in \mathbf{R}^n$ i Lipšicovog uslova sledi

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v) - \langle J'(u), u - v \rangle| &\leq \int_0^1 |J'(u + \tau(u - v)) - J'(u)| |u - v| d\tau \\ &\leq \int_0^1 L \|u - v\|^2 |\tau| d\tau = L \frac{\|u - v\|^2}{2}. \end{aligned}$$