

Predgovor

Udžbenik *Analiza I za informatičare* nastao je na osnovu dugogodišnjih predavanja koje je prvi autor držao za studente informatike i matematike iz kursa realne funkcije jedne realne promenljive, kraće Analiza I, i bogatog iskustva drugog i trećeg autora u pisanju zbirki zadataka iz matematičke analize. Knjiga je pisana prema važećem programu ovog predmeta na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Nadamo se da će udžbenik moći koristiti i studenti drugih usmerenja i fakulteta.

Trudili smo se da izložimo osnovne pojmove i rezultate matematičke analize uz minimum složene matematičke aparature, ali zadržavajući matematičku strogost, koja omogućava studentu da korektno prilagodi stečeno znanje konkretnim situacijama.

Danas postoji veliki broj matematičkog softvera za simboličko računanje (Mathematica, Maple, Matlab) koji znatno olakšavaju rad i oslobađaju od zamornog računanja. Zato smo udžbenik prilagodili ovoj situaciji, te smo ga oslobodili formalnog računa, na primer kod neodređenog integrala, a akcenat stavili na usvajanje fundamentalnih pojmova i rezultata koje smo ilustrovali brojnim odabranim primerima i slikama.

Drago nam je da se možemo zahvaliti recenzentima akademiku dr Olgi Hadžić i dr Stojanu Radenoviću na korisnim sugestijama i primedbama. Zahvaljujemo se Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta na omogućavanju korišćenja departmanske opreme u toku rada na knjizi i Univerzitetu u Novom Sadu što je omogućio štampanje ove knjige.

Autori

Novi Sad, januar 2003.

Sadržaj

Predgovor	iii
Sadržaj	v
1 Uvod	1
1.1 Osnovni pojmovi i oznake	1
1.1.1 Matematička logika	1
1.1.2 Skup	3
1.1.3 Relacije	4
1.1.4 Funkcija	5
1.1.5 Kardinalni broj skupa	7
1.2 Polje realnih brojeva	8
1.2.1 Aksiomi realnih brojeva (R1)-(R16)	8
1.2.2 Posledice aksioma (R1)-(R16)	10
1.2.3 Supremum i infimum skupa	11
1.2.4 Podskupovi realnih brojeva	13
1.2.5 Arhimedov princip i geometrijska interpretacija skupa realnih brojeva	20
1.2.6 Skup \mathbb{R} kao topološki prostor	24
1.2.7 Prebrojivi i neprebrojivi skupovi	25
1.3 Realne funkcije	26
1.3.1 Osnovni pojmovi	26
1.3.2 Elementarne funkcije	30
1.3.3 Parametarsko zadavanje krivih	40
1.3.4 Krive date u polarnim koordinatama	41
2 Nizovi	43
2.1 Osnovni pojmovi	43
2.2 Granična vrednost niza	44

2.2.1	Definicija konvergentnog niza	44
2.2.2	Osobine konvergentnih nizova	46
2.3	Monotoni nizovi	52
2.4	Niz $(1 + 1/n)^n$	53
2.5	Neki važni konvergentni nizovi	57
2.6	Košijevi nizovi	62
2.7	Podnizovi i tačke nagomilavanja niza	65
3	Granična vrednost i neprekidnost funkcije	69
3.1	Granična vrednost funkcije	69
3.1.1	Definicija granične vrednosti funkcije	69
3.1.2	Leva i desna granična vrednost funkcije	74
3.2	Uopštenje granične vrednosti funkcije	76
3.3	Osobine granične vrednosti funkcije	77
3.4	Neke važne granične vrednosti funkcija	82
3.5	Asimptote	91
3.6	Asimptotsko ponašanje	92
3.7	Neprekidnost funkcije	94
3.7.1	Definicija neprekidne funkcije	94
3.7.2	Osobine neprekidnih funkcija	95
3.7.3	Prekidi funkcija	97
3.7.4	Neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu	100
4	Izvod funkcije	106
4.1	Definicija prvog izvoda funkcije	106
4.2	Geometrijsko tumačenje izvoda i priraštaja funkcije	114
4.3	Izvod zbira, proizvoda i količnika funkcija	116
4.4	Izvod inverzne funkcije	120
4.5	Izvod složene funkcije	122
4.6	Tablica prvih izvoda	125
4.7	Prvi izvod funkcije date u parametarskom obliku	126
4.8	Diferencijal funkcije	127
4.9	Izvodi višeg reda	131
4.10	Lagranžova teorema srednje vrednosti i primene	134
4.11	Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije	141
4.12	Košijeva teorema srednje vrednosti	143
4.13	Tejlorova formula	144
4.14	Lopitalovo pravilo	153
4.15	Primena izvoda na nejednakosti	158
4.16	Konveksnost i konkavnost	161

4.17	Primena izvoda	167
4.18	Grafici funkcija	172
5	Neodređeni integral	185
5.1	Definicija i osnovne osobine	185
5.2	Tablica integrala nekih osnovnih elementarnih funkcija	186
5.3	Osnovne osobine neodređenog integrala	187
5.4	Smena promenljive u neodređenom integralu	188
5.5	Parcijalna integracija	191
5.6	Integrali racionalnih funkcija	193
5.7	Integrali trigonometrijskih funkcija	199
5.8	Integrali iracionalnih funkcija	202
5.9	Metod Ostrogradskog	203
5.10	Integral binomnog diferencijala	206
6	Određeni integral	209
6.1	Definicija određenog integrala	209
6.2	Osobine određenog integrala	218
6.3	Klase integrabilnih funkcija	225
6.4	Teoreme srednje vrednosti za određeni integral	228
6.5	Osnovna teorema integralnog računa	229
6.6	Smena promenljivih kod određenog integrala	232
6.7	Parcijalna integracija	234
6.8	Primene određenog integrala	237
6.8.1	Površina ravnih figura	237
6.8.2	Zapremina obrtnih tela	242
6.8.3	Dužina luka krive	245
6.8.4	Površina obrtnih tela	247
	Literatura	249
	Indeks	251

Glava 1

Uvod

1.1 Osnovni pojmovi i oznake

U ovom poglavlju ćemo navesti neke osnovne pojmove i oznake koji se koriste u ovom udžbeniku. Kako je savremena matematika u značajnoj meri zasnovana na matematičkoj logici i teoriji skupova, to ćemo ukratko navesti neke elemente iz ovih oblasti.

1.1.1 Matematička logika

Osnovni pojam u matematičkoj logici je *iskaz* ili *sud*. To je rečenica koja ima smisla, i koja je ili *tačna* ili *netačna*. Istinitosna vrednost za tačan iskaz se označava sa \top ili 1, a za netačan iskaz se označava sa \perp ili 0. Iskaze označavamo slovima latinice p, q, r, \dots .

Iskazi se povezuju sa dole navedenim *logičkim operacijama* i tako dobijaju novi iskazi.

1. *Konjunkcija iskaza p i q* označava se sa $p \wedge q$. To je iskaz koji je tačan ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna.
2. *Disjunkcija iskaza p i q* označava se sa $p \vee q$. To je iskaz koji je tačan ako i samo ako je bar jedan od iskaza p i q tačan.
3. *Implikacija iskaza p i q* označava se sa $p \Rightarrow q$. To je iskaz koji je netačan ako i samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan. U svim ostalim slučajevima implikacija je tačna.
4. *Ekvivalencija iskaza p i q* označava se sa $p \Leftrightarrow q$. To je iskaz koji je tačan ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna ili ako su oba iskaza p i q netačna.

5. *Negacija iskaza* p označava se sa $\neg p$. To je iskaz koji je tačan ako i samo ako je iskaz p netačan.

Iskaznu algebru čini skup $\{\top, \perp\}$ sa logičkim operacijama $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, što su redom oznake za negaciju, konjunkciju, disjunkciju, implikaciju i ekvivalenciju. \top i \perp su *logičke konstante*. *Iskazna slova* su p, q, r, \dots , a *iskazne formule* su iskazna slova, negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija iskaznih formula, i, uopšte, iskazne formule se dobijaju posle konačno mnogo primena logičkih operacija na iskazne formule.

Tautologija je iskazna formula koja ima vrednost \top za ma koje vrednosti iskaznih slova u iskaznoj formuli.

Navešćemo sada tautologije koje se često koriste:

1. $p \Rightarrow p$ (*refleksivnost implikacije*).
2. $p \vee \neg p$ (*princip isključenja trećeg*).
3. $p \Leftrightarrow \neg \neg p$ (*princip dvojne negacije*).
4. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p, (p \vee p) \Leftrightarrow p$ (*idempotentnost operacija \wedge i \vee*).
5. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (*komutativnost operacije \wedge*).
6. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (*komutativnost operacije \vee*).
7. $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ (*asocijativnost operacije \wedge*).
8. $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ (*asocijativnost operacije \vee*).
9. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (*distributivnost \wedge prema \vee*).
10. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (*distributivnost \vee prema \wedge*).
11. $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q), (\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (*De Morganovi zakoni*).
12. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (*zakon kontrapozicije*).
13. $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ (*negacija implikacije*).
14. $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p, (p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$ (*zakoni apsorpcije*).

Često ćemo koristiti kvantifikatore iz predikatskog računa " \forall " i " \exists ", koje čitamo "svaki" i "postoji", na primer $\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg p(x)$, ili $\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg p(x)$.

1.1.2 Skup

Skupovi se obeležavaju velikim slovima latinice, na primer $A, B, C, \dots, X, Y, \dots$. Skup je poznat ako je poznato pravilo, ograničenje ili osobina na osnovu koje možemo odrediti sve njegove elemente. Elemente skupa obeležavamo malim slovima latinice, na primer $a, b, c, \dots, x, y, \dots$. Ako element x pripada (resp. ne pripada) skupu X , to pišemo $x \in X$ (resp. $x \notin X$). Ako element x ima osobinu P , tada to označavamo sa $P(x)$. Skup elemenata x sa osobinom P označavamo sa $\{x \mid P(x)\}$.

Skup X je *podskup* skupa Y , u oznaci $X \subset Y$, ako svaki element skupa X pripada skupu Y , tj.

$$(X \subset Y) \iff \left((\forall x) (x \in X \Rightarrow x \in Y) \right).$$

Prazan skup, u oznaci \emptyset , tj. skup koji nema elemenata, se može definisati kao $\{x \mid x \neq x\}$. Za proizvoljan skup X važi $\emptyset \subset X$. Ako je $X \subset Y$ i $Y \subset X$, tada kažemo da su X i Y *jednaki skupovi*, tj.

$$(X = Y) \iff \left((\forall x) (x \in X \iff x \in Y) \right).$$

Osnovne operacije sa skupovima su:

1. *unija skupova*: $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$;
2. *preseka skupova*: $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$;
3. *razlika skupova*: $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$;
4. *komplement skupa*: $X^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin X\}$,

gde je U univerzalni skup, tj. onaj koji sadrži sve skupove X sa kojima radimo.

Skupovi X i Y su *disjunktni* ako je $X \cap Y = \emptyset$.

Za operacije sa skupovima važe sledeće osobine :

1. *zakon idempotentnosti*: $X \cup X = X$, $X \cap X = X$;
2. *zakon komutativnosti*: $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$;
3. *zakon asocijativnosti*: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,
 $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
4. *zakoni distributivnosti*: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,
 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;
5. *zakon apsorpcije*: $X \cap (X \cup Y) = X$, $X \cup (X \cap Y) = X$;
6. $X \cup \emptyset = X$, $X \cup U = U$, $X \cap \emptyset = \emptyset$, $X \cap U = X$;

7. $X \cup X^c = U$, $X \cap X^c = \emptyset$;
 8. $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$, $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$.

Partitivni skup $P(X)$ datog skupa X je skup svih podskupova skupa X , tj.

$$P(X) = \{Y \mid Y \subset X\}.$$

Posebno, $P(X)$ uvek sadrži prazan skup \emptyset i sam skup X . Ako skup X ima n članova, onda njegov partitivni skup ima 2^n elemenata.

Za nas će najvažniji biti *skupovi brojeva*:

1. skup *prirodnih brojeva* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$;
2. skup *celih brojeva* $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$;
3. skup *racionalnih brojeva* $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$;
4. skup *realnih brojeva* \mathbb{R} ;
5. skup *kompleksnih brojeva* $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

O skupovima brojeva će biti više reči kasnije (videti poglavlje 1.2). Podsetimo se da važe relacije:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

1.1.3 Relacije

Neka su dati neprazni skupovi X i Y . Tada je *uređen par* (x, y) elemenata $x \in X$ i $y \in Y$ definisan kao skup sa dva elementa na sledeći način:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Može se pokazati da su dva uređena para (a_1, b_1) i (a_2, b_2) *jednaka* ako i samo je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$. *Dekartov*¹ (*direktan*) *proizvod skupova* X i Y , u oznaci $X \times Y$, je skup svih uređenih parova (x, y) , gde je $x \in X$ i $y \in Y$, tj.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Uređene trojke, četvorke, ... se uvode analogno. U matematici je posebno važan skup \mathbb{R}^n , tj. svih uređenih n -torki realnih brojeva:

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

¹R. Descartes (1596–1650)

Definicija 1.1. Relacija na nepraznom skupu A je podskup skupa $A \times A$, tj. elementi su uređeni parovi čiji su i prvi i drugi element iz skupa A .

Ako uređeni par (x, y) pripada skupu R , gde je $R \subset A \times A$, tada pišemo $x \sim y$ i kažemo da su x i y u relaciji R . Relacija R može imati i neke od sledećih važnih osobina:

1. refleksivnost: $(\forall x \in A) x \sim x$;
2. simetričnost: $(\forall x, y \in A) (x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$;
3. antisimetričnost: $(\forall x, y \in A) (x \sim y \wedge y \sim x) \Rightarrow (x = y)$;
4. tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in A) (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$.

Relacija na skupu A je *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Klasa ekvivalencije za element x je skup koji sadrži sve one $y \in A$ za koje važi $x \sim y$. Količnik skup A/R je skup svih klasa ekvivalencije.

U svim skupovima brojeva, jednakost ($=$) je relacija ekvivalencije. Kongruencija po modulu m , za $m \in \mathbb{N}$, je takođe relacija ekvivalencije na \mathbb{N} . U jednu klasu ekvivalencije ulaze svi oni prirodni brojevi koji imaju isti ostatak pri deobi sa m .

Relacija na skupu A je *relacija (parcijalnog) poretka* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Na primer, u skupu realnih brojeva \mathbb{R} , relacije manje ili jednako (\leq) i *veće ili jednako* (\geq) su relacije poretka. Ako je za svaka dva elementa $x, y \in A$ uvek $x \leq y$ ili $y \leq x$ onda kažemo da je relacija \leq *relacija totalnog poretka*.

Ako je istovremeno $x \leq y$ i $x \neq y$, tada pišemo $x < y$ ili, ekvivalentno, $y > x$.

1.1.4 Funkcija

Funkcija (preslikavanje) je jedan od osnovnih i najviše korišćenih pojmova u matematici i važan je u mnogim naukama.

Definicija 1.2. Neka su A i B dva neprazna skupa. Pridruživanje (korespondencija, pravilo) f koje svakom elementu x skupa A dodeljuje jedan element $f(x)$ skupa B naziva se *funkcija (preslikavanje) skupa A u skup B* , u oznaci $f : A \rightarrow B$.

Takođe se kaže da je f *funkcija* koja preslikava skup A u skup B . Skup A se naziva *domen* (ili: *definicioni skup*), a skup B se naziva *kodomen* funkcije f .

Skup vrednosti $f(A)$ funkcije f je podskup kodomena B dat sa

$$f(A) = \left\{ y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x) \right\}.$$

Pojam funkcije se može ekvivalentno definisati (kao relacija na $A \times B$, videti kasnije grafik) i na sledeći način:

Definicija 1.3. *Neka su A i B dva neprazna skupa. Podskup $f \subset A \times B$ je funkcija ako važe sledeća dva uslova:*

1. $(\forall x \in A) (\exists y \in B) (x, y) \in f$;
2. $(\forall x \in A) (\forall y_1 \in B) (\forall y_2 \in B) \left((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \right) \Rightarrow (y_1 = y_2)$.

Dve funkcije $f_1 : A_1 \rightarrow B_1$ i $f_2 : A_2 \rightarrow B_2$ su *jednake* ako i samo ako imaju jednake domene, tj. $A_1 = A_2$, imaju jednake kodomene, tj. $B_1 = B_2$ i ako važi $f_1(x) = f_2(x)$ za sve $x \in A_1 = A_2$.

Definicija 1.4. *Funkcija $f : A \rightarrow B$ je injekcija (ili: funkcija 1 – 1) ako za svaki par $(x_1, x_2) \in A \times A$ važi*

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definicija 1.5. *Funkcija $f : A \rightarrow B$ je surjekcija (ili: funkcija na) ako važi*

$$(\forall y \in B) (\exists x \in A) f(x) = y.$$

Drugim rečima, funkcija f je surjekcija ako i samo ako je $f(A) = B$, tj. ako se njen skup vrednosti poklapa sa njenim kodomenom.

Definicija 1.6. *Funkcija $f : A \rightarrow B$ je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.*

Definicija 1.7. *Za dve funkcije $f : A \rightarrow B$ i $g : B \rightarrow C$ funkcija $g \circ f : A \rightarrow C$, data sa*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ za sve } x \in A,$$

zove se kompozicija funkcija f i g (ili: složena funkcija) od f i g .

Primetimo da je u opštem slučaju $f \circ g \neq g \circ f$, tj. redosled funkcija f i g je bitan.

Definicija 1.8. *Neka je funkcija $f : A \rightarrow B$ bijekcija. Tada za svako $y \in B$ postoji tačno jedan element $x \in A$, takav da je $y = f(x)$, pa je podskup skupa $B \times A$, definisan sa*

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (y, x) \in B \times A, y = f(x)\}$$

funkcija sa domenom B i kodomenom A , koja se naziva inverzna funkcija za f .

Inverzna funkcija f^{-1} funkcije f je takođe bijekcija i za nju važe relacije

$$(\forall y \in B) \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$

$$(\forall x \in A) \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{i} \quad (\forall y \in B) \quad (f \circ f^{-1})(y) = y.$$

Grafik funkcije (funkcija u smislu definicije 1.3) $f : A \rightarrow B$, u oznaci G_f , je definisan na sledeći način:

$$G_f = \left\{ (x, y) \mid (x, y) \in A \times B, y = f(x) \right\}.$$

Definicija 1.9. Binarna operacija \star na skupu A je preslikavanje $\star : A \times A \rightarrow A$.

Relaciju $\star(x, y) = z$ ($x, y, z \in A$) zapisujemo na sledeći način

$$\star(x, y) = x \star y.$$

1.1.5 Kardinalni broj skupa

"Brojanje" elemenata nekog skupa i njihovo poređenje sa "brojem" elemenata nekog drugog skupa je jasno za konačne skupove, ali zahteva preciziranje kada ovaj pojam želimo uvesti za proizvoljne skupove. Pojmovi "konačno" i "beskonačno" elemenata isto zahtevaju preciziranje.

Kažemo da se između skupova X i Y može uspostaviti *uzajamno jednoznačno preslikavanje* ako postoji bijekcija $f : X \rightarrow Y$, tj. ako svakom elementu skupa X odgovara jedan i samo jedan element skupa Y , a različitim elementima skupa X odgovaraju različiti elementi skupa Y i, obrnuto, svakom elementu skupa Y odgovara jedan i samo jedan element skupa X . U tom slučaju su skupovi X i Y *iste moći*, u oznaci $X \sim Y$ i ova relacija je jedna relacija ekvivalencije. Klasa ekvivalencije kojoj pripada skup X zove se *kardinalni broj skupa* X i označava se sa $\text{card} X$.

Kardinalni broj skupa X je *manji ili jednak* od kardinalnog broja skupa Y ako je X iste moći kao neki podskup skupa Y , što pišemo $\text{card} X \leq \text{card} Y$. Uvedena relacija \leq je jedna relacija totalnog poretka. Reći ćemo da je skup X *manje moći* od skupa Y , što pišemo $\text{card} X < \text{card} Y$, ako je $\text{card} X \leq \text{card} Y$ i $\text{card} X \neq \text{card} Y$. Tako uvek važi $\text{card} X < \text{card} P(X)$.

Obratimo pažnju da iako relacija poretka na skupovima "biti podskup" $X \subset Y$ uvek povlači $\text{card} X \leq \text{card} Y$, ove dve relacije treba razlikovati. Naime, X može biti pravi podskup od Y , a da ipak bude $\text{card} X = \text{card} Y$. Tako su, recimo, skup \mathbb{N} i njegov pravi podskup svih parnih prirodnih brojeva iste moći, jer je funkcija f , definisana sa $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, bijekcija.

Za skup ćemo reći da je *konačan* (u smislu Dedekinda²) ako nije iste moći sa nekim svojim pravim podskupom, a da je *beskonačan* ako nije konačan, tj. ako je skup iste moći sa nekim svojim pravim podskupom.

1.2 Polje realnih brojeva

Skup brojeva koji će nam biti osnovni u ovom udžbeniku je skup realnih brojeva \mathbb{R} . U toku školovanja, prvo se upoznajemo sa skupovima prirodnih, celih i racionalnih brojeva, koje označavamo redom sa \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{Q} .

1.2.1 Aksiomi realnih brojeva (R1)-(R16)

U ovom poglavlju ćemo prikazati aksiomatsko zasnivanje realnih brojeva, pa ćemo zatim ostale skupove brojeva dobiti na osnovu njih.

Posmatraćemo skup $\mathbb{R} = \{x, y, z, \dots\}$ sa dve binarne operacije: *sabiranje* $+$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i *množenje* \cdot : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Na osnovu sledeće tri aksiome:

- (R1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost sabiranja);
- (R2) $(\exists 0 \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + 0 = 0 + x = x$ (postojanje neutralnog elementa za sabiranje);
- (R3) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists (-x) \in \mathbb{R}) \quad (-x) + x = x + (-x) = 0$ (postojanje suprotnog elementa za sabiranje),

$(\mathbb{R}, +)$ čini *grupu* u odnosu na sabiranje. Sa aksiomom

- (R4) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y + x$ (komutativnost sabiranja),

$(\mathbb{R}, +)$ postaje *Abelova*³ ili *komutativna grupa*.

Na osnovu sledeće četiri aksiome, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ postaje *komutativna grupa*:

- (R5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (asocijativnost množenja);
- (R6) $(\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (postojanje neutralnog elementa za množenje);
- (R7) $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) (\exists x^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \quad x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$ (postojanje inverznog elementa za množenje);

²R. Dedekind (1831-1916)

³N. Abel (1802-1829)

(R8) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x$ (komutativnost množenja).

Prethodnih osam aksioma sa aksiomom

(R9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, (distributivnost množenja u odnosu na sabiranje),

čine da je $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ polje.

U skupu \mathbb{R} definisana je i binarna relacija *manje ili jednako* (\leq) pomoću sledećih pet aksioma:

(R10) $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x \leq x$ (refleksivnost binarne relacije \leq);

(R11) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(R12) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimetrija binarne relacije \leq);

(R13) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \leq y \vee y \leq x$ (uporedivost);

(R14) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x \leq y \Rightarrow (x + z \leq y + z)$ (kompatibilnost relacije \leq u odnosu na sabiranje);

(R15) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$ (kompatibilnost relacije \leq u odnosu na množenje);

Prethodnih petnaest aksioma definišu skup \mathbb{R} sa operacijama sabiranja i množenja i relacijom \leq kao *uređeno polje*.

Konačno, imamo aksiomu **(R16)**:

(R16) Neka su X i Y dva neprazna podskupa skupa \mathbb{R} sa osobinom

$$(\forall x \in X) (\forall y \in Y) \quad x \leq y.$$

Tada postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $(\forall x \in X) (\forall y \in Y) \quad x \leq c \leq y$.

Navedenih šesnaest aksioma određuju \mathbb{R} kao *kompletno uređeno polje*.

Napomena. Primitimo da skup racionalnih brojeva \mathbb{Q} (videti potpoglavlje 1.2.4) zadovoljava prvih petnaest, ali ne i zadnju, šesnaestu, aksiomu.

Neka su x i y dva realna broja. Ako je $x \leq y$, tada još pišemo $y \geq x$. Binarna relacija “ \geq ” je relacija poretka, kao što je i relacija \leq . Ako važi $x \leq y$ i $x \neq y$, tada pišemo $x < y$. Takođe imamo po definiciji $x > y \iff y < x$.

1.2.2 Posledice aksioma (R1)–(R16)

Teorema 1.1. *Posledice aksioma (R1), (R2), (R3) i (R4) su:*

- a) u skupu \mathbb{R} postoji jedinstven neutralni element za sabiranje;
- b) u skupu \mathbb{R} svaki element ima jedinstven suprotni element u odnosu na sabiranje;
- c) za date realne brojeve a i b jednačina

$$a + x = b$$

ima jedinstveno rešenje u \mathbb{R} .

Teorema 1.2. *Posledice aksioma (R5), (R6), (R7), (R8) i (R9) su:*

- a) u skupu \mathbb{R} postoji jedinstven neutralni element za množenje;
- b) u skupu \mathbb{R} svaki element ima jedinstven inverzni element u odnosu na množenje;
- c) za date realne brojeve $a \neq 0$ i b , jednačina

$$a \cdot x = b$$

ima jedinstveno rešenje u \mathbb{R} .

Teorema 1.3. *Posledice aksioma (R1)–(R15) su da za sve $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ važi:*

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> a) $x \cdot 0 = 0$; c) $-(-x) = x$; e) $(-x)(-y) = xy$; g) $(x \leq y) \iff (-x \geq -y)$; i) $(x \leq y \wedge x' \leq y') \Rightarrow (x + x' \leq y + y')$; k) $0 < 1$; | <ul style="list-style-type: none"> b) $-x = (-1) \cdot x$; d) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$; f) $(x \leq 0) \iff (-x \geq 0)$; h) $(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow (xy > 0)$; j) $(x < 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (xy < 0)$; l) $(x > 0) \iff (x^{-1} > 0)$. |
|--|--|

Dokaz.

- a) Na osnovu aksioma (R6), (R8) i (R2) imamo

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x,$$

odakle je $x + x \cdot 0 = x$. Iz teoreme 1.1 c) sledi da je $x \cdot 0$ takođe neutralni element za sabiranje. Sada, na osnovu teoreme 1.1 a), imamo $x \cdot 0 = 0$.

- b) Aksioma (R8) i a) daju

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

Na osnovu toga je $(-1) \cdot x$ takođe suprotan elementu x , pa prema teoremi 1.1 b) imamo $(-1) \cdot x = -x$.

- c) Na osnovu definicije elementa $-(-x)$ je $(-x) + (-(-x)) = 0$, dok je na osnovu

definicije suprotnog elementa u odnosu na sabiranje, broja $-x$: $(-x) + x = 0$. Sada, na osnovu jedinstvenosti rešenja jednačine $a + x = b$, dobijamo tvrđenje.

d) Na osnovu jednakosti $0 = x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y)$, tj. $xy + x(-y) = 0$, i $xy + (-xy) = 0$, sledi $x(-y) = -(xy)$.

e) Sledi iz d) i c).

f) Iz aksiome (R14) sledi: $(x \leq 0) \Rightarrow ((-x) + x \leq (-x) + 0) \Rightarrow (0 \leq -x)$.

g) $(x \leq y) \Rightarrow ((-x) + (-y)) + x \leq ((-x) + (-y)) + y \Rightarrow (-y \leq -x)$.

h) Pomoću f), (R15) i e) imamo

$$(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow ((-x > 0 \wedge -y > 0)) \Rightarrow ((-y)(-x) > 0) \iff (xy > 0).$$

i) Kako je $(x \leq y) \Rightarrow (x + x' \leq x' + y)$ i $(x' \leq y') \Rightarrow (x' + y \leq y' + y)$, iz (R11) i (R4) sledi tvrđenje.

j) $(x < 0 \wedge 0 < y) \Rightarrow (0 < -x \wedge 0 < y) \Rightarrow (0 < (-x)y) \Rightarrow (0 < ((-1)x)y) \Rightarrow (0 < (-1)(xy)) \Rightarrow (0 < -(xy)) \Rightarrow (xy < 0)$.

k) Na osnovu aksiome (R6) je $1 \neq 0$, a na osnovu (R13) je ili $1 > 0$ ili $1 < 0$. Neka je $1 < 0$; tada iz h) i $1 \neq 0$ sledi $(1 < 0 \wedge 1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow 0 < 1$. To je kontradikcija, što znači da je $1 > 0$.

l) Prvo je $x^{-1} \neq 0$. Neka je $x^{-1} < 0$. Tada iz j) sledi

$$(x^{-1} < 0 \wedge 0 < x) \Rightarrow (x \cdot x^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0),$$

što je kontradikcija sa k). □

1.2.3 Supremum i infimum skupa

Uvedimo još neke pojmove vezane za skup realnih brojeva \mathbb{R} .

Definicija 1.10.

1. Broj $d \in \mathbb{R}$ je donje ograničenje nepraznog skupa $X \subset \mathbb{R}$, ako važi $(\forall x \in X) x \geq d$.

Skup $X \subset \mathbb{R}$ je ograničen odozdo (ili: sa donje strane), ako ima bar jedno donje ograničenje.

2. Broj $g \in \mathbb{R}$ je gornje ograničenje nepraznog skupa $X \subset \mathbb{R}$, ako važi $(\forall x \in X) x \leq g$.

Skup $X \subset \mathbb{R}$ je ograničen odozgo (ili: sa gornje strane), ako ima bar jedno gornje ograničenje.

3. Skup $X \subset \mathbb{R}$ je ograničen ako je ograničen i sa donje i sa gornje strane.

Definicija 1.11.

1. Element $a \in X$ je maksimalni element (maksimum) skupa X ako je $a \geq x$ za svako $x \in X$.
2. Element $a \in X$ je minimalni element (minimum) skupa X ako je $a \leq x$ za svako $x \in X$.

Definicija 1.12.

1. Najmanje gornje ograničenje skupa $X \subset \mathbb{R}$ (ili: supremum skupa X) je broj $s \in \mathbb{R}$ za koji važe sledeća dva uslova:

$$(\forall x \in X) \quad x \leq s \quad (\text{tj. } s \text{ je gornje ograničenje skupa } X), \text{ i}$$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists x \in X) \quad x > s - \epsilon.$$

2. Najveće donje ograničenje skupa $X \subset \mathbb{R}$ (ili: infimum skupa X) je broj $i \in \mathbb{R}$ za koji važe sledeća dva uslova:

$$(\forall x \in X) \quad x \geq i \quad (\text{tj. } i \text{ je donje ograničenje skupa } X), \text{ i}$$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists x \in X) \quad x < i + \epsilon.$$

Primetimo da infimum skupa $X \subset \mathbb{R}$ koji pripada skupu X je minimum skupa X i da supremum skupa $X \subset \mathbb{R}$ koji pripada skupu X je maksimum skupa X .

Ako postoji maksimum (minimum) skupa onda je on jedinstveno određen.

Na osnovu definicije 1.12 važi

$$\begin{aligned} \sup X &= \min\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in X) x \leq a\}, \\ \inf X &= \max\{a \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in X) x \geq a\}. \end{aligned}$$

Važna je sledeća teorema.

Teorema 1.4. (Teorema o supremumu.) *Svaki neprazan odozgo ograničen skup $X \subset \mathbb{R}$ ima supremum u \mathbb{R} .*

Dokaz. Pokazaćemo da svaki neprazan sa gornje strane ograničen skup $X \subset \mathbb{R}$ ima supremum. Neka je skup Y definisan sa:

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in X) x \leq y\}.$$

Skup Y je, prema pretpostavci, neprazan, pa možemo primeniti aksiomu (R16) koja kaže da tada postoji $c \in \mathbb{R}$ tako da je

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) x \leq c \leq y.$$

Na osnovu konstrukcije skupa Y , odmah sledi $c = \sup X (= \min Y)$. □

Analogno važi sledeća teorema.

Teorema 1.5. *Svaki sa donje strane ograničen neprazan podskup skupa realnih brojeva ima infimum.*

1.2.4 Podskupovi realnih brojeva

Prirodni brojevi

Skup *prirodnih brojeva* \mathbb{N} je najmanji (u smislu relacije \subset) podskup skupa \mathbb{R} koji sadrži 1 i koji ima osobinu da ako $n \in \mathbb{N}$, tada i $n + 1 \in \mathbb{N}$. Na osnovu ove definicije važi u skupu prirodnih brojeva *princip matematičke indukcije*:

Ako je $X \subset \mathbb{N}$ takav da $1 \in X$ i za svaki element $n \in X$ važi $(n + 1) \in X$, tada je $X = \mathbb{N}$, tj. skup X se poklapa sa skupom \mathbb{N} .

Princip matematičke indukcije koristimo za dokaz raznih formula koje važe za sve prirodne brojeve počev od nekog, najčešće od broja 1. Taj postupak dokazivanja se sastoji iz tri dela:

1. *dokaz* da je formula tačna za $n = 1$ (ili, za neko početno $n_0 > 1$);
2. *pretpostavka* da je formula tačna za $n = m$, za neko $m \in \mathbb{N}$;
3. *dokaz* da je formula tačna za $n = m + 1$, ako je tačna za $n = m$.

Ako su prethodna tri koraka korektno sprovedena, na osnovu principa matematičke indukcije sledi da je skup onih n -ova koje zadovoljavaju dato tvrđenje u stvari skup svih prirodnih brojeva (eventualno počev od nekog n_0 -tog).

Skup prirodnih brojeva \mathbb{N} ima najmanji element, broj 1, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ je $1 \leq n$. Metodom matematičke indukcije se dokazuje da $m, n \in \mathbb{N}$ povlači $m + n \in \mathbb{N}$ i $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Ako je element n u skupu \mathbb{N} , tada je i njegov sledbenik, tj. broj $n + 1$, takođe u skupu \mathbb{N} (odatle sledi da skup \mathbb{N} nema najveći element). Za svaki neprazan

podskup prirodnih brojeva koji je ograničen sa gornje strane uvek postoji maksimalan element. Na osnovu dva zadnja tvrđenja sledi da skup prirodnih brojeva nije ograničen sa gornje strane.

Primer 1.1. Korišćenjem principa matematičke indukcije pokazaćemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važe sledeće formule:

$$\text{a)} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$\text{b)} \quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$\text{c)} \quad 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

a) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n , odnosno da je

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

što znači da je formula tačna i za $n+1$. Na osnovu principa matematičke indukcije sada možemo tvrditi da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

b) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n :

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$

tj. tačnost i za $n+1$.

c) Za 1 imamo tačnu formulu $1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$. Pod pretpostavkom da je formula

tačna za n :

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

odnosno, formula je tačna i za $n+1$.

d) Za 1 imamo $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1},$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3) + 1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}, \end{aligned}$$

tj. tačnost formule i za $n+1$.

Primer 1.2. Pokazaćemo da je zbir prvih n članova geometrijske progresije sa prvim elementom a i količnikom $q \neq 1$ jednak

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Za $n = 1$ je $a = a \frac{1 - q}{1 - q}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za n :

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

važi

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n &= a \frac{1 - q^n}{1 - q} + aq^n = a \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \end{aligned}$$

tj. formula je tačna i za $n+1$.

Primer 1.3. (Bernulijeva⁴ nejednakost.) Primenom matematičke indukcije dokazaćemo Bernulijevu nejednakost

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}, \quad h > -1. \quad (1.1)$$

Za $n = 1$ važi $1+h = 1+h$. Pod pretpostavkom da je nejednakost tačna za $n \geq 1$, $(1+h)^n \geq 1+nh$, tada iz prethodne nejednakosti sledi (zbog $1+h > 0$):

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n \cdot (1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h,$$

tj. formula je tačna i za $n+1$, jer je $nh^2 \geq 0$.

Binomna formula

Ako je n prirodan broj, sa $n!$ (čita se: n faktoriyel) se označava proizvod svih prirodnih brojeva od n do 1, tj. $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Po definiciji uzimamo $0! = 1$.

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq k \leq n$, definiše se kao

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Važe sledeće jednakosti:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$$

Važi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (1.2)$$

Primer 1.4. Dokazaćemo binomnu formulu

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

⁴Jacob Bernoulli (1657-1705)

Za $n = 1$ formula (1.3) postaje tačna jednakost

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^{1-1} + \binom{1}{1} a^{1-1} b^{1-0}.$$

Pod pretpostavkom da je formula (1.3) tačna za n , množeći (1.3) sa $a+b$ dobijamo (u dokazu se koristi jednakost (1.2))

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k, \end{aligned}$$

što daje tačnost za $n+1$.

Celi brojevi

Skup *celih brojeva*, \mathbb{Z} , sadrži sve prirodne brojeve, 0, kao i brojeve oblika $-n$, $n \in \mathbb{N}$, koji su suprotni prirodnim brojevima u odnosu na operaciju sabiranja. Primetimo da operacija “ $-$ ”, *oduzimanje*, definisana sa $b-a = b+(-a)$, izvodi iz skupa prirodnih brojeva, ali je dobro definisana u \mathbb{Z} , tj. razlika dva cela broja je ceo broj. U skupu celih brojeva \mathbb{Z} važnu ulogu ima broj 0 (nula) koja ima osobinu da za svako $x \in \mathbb{Z}$ važi $x+0 = 0+x = x$. Brojevi $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$, suprotni su brojevima $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, tj. $n+(-n) = 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Skup \mathbb{Z} je komutativna grupa u odnosu na sabiranje.

Za svaki neprazan podskup celih brojeva koji je ograničen sa gornje strane uvek postoji maksimalan element. Za svaki neprazan podskup celih brojeva koji je ograničen sa donje strane uvek postoji minimalan element. Na osnovu dva zadnja tvrđenja sledi da skup celih brojeva nije ograničen ni sa gornje strane ni sa donje strane.

Ako je za dva cela broja m i n proizvod $m \cdot n^{-1} = k$ ceo broj onda kažemo da je m *deljivo* sa n . Broj $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, je *prost* ako u \mathbb{N} nema drugih delitelja sem 1 i p . Osnovna teorema aritmetike kaže da se svaki prirodan broj n može na jedinstven način (do na poredak) predstaviti u obliku $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$, gde su p_1, \dots, p_k prosti brojevi.

Brojevi $m, n \in \mathbb{Z}$ su *uzajamno prosti* ako su jedini zajednički delitelji 1 i -1 .

Racionalni brojevi

Skup *racionalnih brojeva*, \mathbb{Q} , sadži sve elemente oblika $p \cdot q^{-1}$, gde $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$, i njegove elemente obično nazivamo *razlomcima*. Operacija “/”, *deljenje*, definisana sa $a/b = a \cdot b^{-1}$, $b \neq 0$, izvodi iz skupa celih brojeva, ali je dobro definisana u \mathbb{Q} . Skup \mathbb{Q} je komutativna grupa u odnosu na sabiranje, dok je skup $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ komutativna grupa u odnosu na množenje.

Dva racionalna broja m_1/n_1 i m_2/n_2 su jednaka ako i samo ako je $m_1 n_2 = m_2 n_1$, gde su $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ i $n_1, n_2 \neq 0$. Broj q/p je inverzan (recipročan) broju p/q , tj. $(p/q) \cdot (q/p) = 1$, gde su $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Iracionalni brojevi

Iracionalni brojevi su oni realni brojevi koji nisu racionalni. Pokažimo da ova definicija ima smisla.

Teorema 1.6. *Postoji iracionalan broj.*

Dokaz. Pokazaćemo prvo da jednačina $x^2 = 2$ *nema rešenja* u skupu racionalnih brojeva \mathbb{Q} . Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji racionalan broj $r > 0$ koji je rešenje jednačine $x^2 = 2$. Tada se može pisati $r = p/q$, gde su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi takvi da važi $r^2 = p^2/q^2 = 2$, odnosno $p^2 = 2q^2$. Odavde sledi da je p^2 paran broj, pa je i p takođe paran broj. Znači važi $p = 2k$ za neko $k \in \mathbb{N}$, odakle je $q^2 = 2k^2$. Prema tome q^2 , a takođe i q je paran broj, što je kontradikcija sa pretpostavkom da su brojevi p i q uzajamno prosti.

Pokazaćemo sada da jednačina $x^2 = 2$ *ima bar jedno rešenje* u skupu realnih brojeva \mathbb{R} . Definišemo skupove X i Y kao

$$X = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\} \quad \text{i} \quad Y = \{y \in \mathbb{R}_+ \mid y^2 > 2\},$$

gde je $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ skup svih pozitivnih realnih brojeva. Kako je $1^2 = 1 < 2$ i $2^2 = 4 > 2$, sledi da je $1 \in X$ i $2 \in Y$, što znači da skupovi X i Y nisu prazni. Takođe je $X \cap Y = \emptyset$. Ako su x i y pozitivni brojevi, važi $x < y \iff x^2 < y^2$. To znači da je proizvoljan element iz X manji od bilo kog elementa iz Y . Dakle, uslovi aksiome (R16) su zadovoljeni, pa postoji pozitivan *realan broj* r takav da je

$$(\forall x \in X) (\forall y \in Y) \quad x \leq r \leq y.$$

Na osnovu (R13), postoje tri mogućnosti: $r^2 < 2$ ili $r^2 > 2$ ili $r^2 = 2$, od kojih važi samo jedna. Dokazaćemo, da je upravo poslednja jednakost tačna. Pretpostavimo prvo da je $r^2 < 2$. Tada realan broj $r_1 = 2(r+1)/(r+2)$ pripada skupu X , jer je

$$r_1^2 - 2 = 4 \cdot \frac{r^2 + 2r + 1}{(r+2)^2} - 2 = 2 \cdot \frac{r^2 - 2}{(r+2)^2} < 0.$$

Sa druge strane, iz relacija

$$r - r_1 = r - 2 \frac{r+1}{r+2} = \frac{r^2 - 2}{r+2} < 0,$$

sledi da je $r_1 \in Y$. Dakle, dobili smo da $r_1 \in X \cap Y$, što je kontradikcija, jer su X i Y birani tako da su disjunktni.

Pretpostavka da je $r^2 > 2$ takođe na sličan način daje kontradikciju. Dakle, ostaje samo treća mogućnost, tj. $r^2 = 2$.

Time smo pokazali da je rešenje jednačine $x^2 = 2$ iracionalan broj. \square

Napomena. Zapravo, postoje *dva* realna (iracionalna) broja koji zadovoljavaju jednačinu $x^2 = 2$, i oni su označeni sa $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

Realan broj napisan u decimalnom obliku je iracionalan ako i samo ako ima beskonačno mnogo decimala različitih od nule, koje se ne ponavljaju periodično.

Realan broj je *algebarski* ako je on rešenje neke algebarske jednačine

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gde su a_n, \dots, a_1, a_0 racionalni brojevi (ekvivalentno celi brojevi).

Realan broj je *transcendentan*, ako nije algebarski.

Kompleksni brojevi

Jednačina $x^2 + 1 = 0$ nije rešiva u skupu realnih brojeva, jer je $x^2 + 1 > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Uvodi se skup kompleksnih brojeva u kojoj je jednačina $x^2 + 1 = 0$ rešiva. Skup kompleksnih brojeva \mathbb{C} se identifikuje sa skupom $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ svih uređenih parova realnih brojeva, u kojem su binarne operacije $+$ i \cdot definisane na sledeći način za $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Skup \mathbb{R} identifikujemo sa skupom $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, a imaginarna jedinica i je kompleksan broj $(0, 1)$. Kompleksan broj (a, b) obeležavamo sa $a + ib$. Prisetimo da je $i^2 = -1$, tj. imaginarna jedinica i je rešenje jednačine $x^2 + 1 = 0$.

Skup kompleksnih brojeva je dat sa

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Broj $a - ib$ je konjugovano kompleksan broj broju $a + ib$.

1.2.5 Arhimedov princip i geometrijska interpretacija skupa realnih brojeva

Značajne su sledeće dve teoreme koje važe u skupu \mathbb{R} , od kojih prva, Arhimedova⁵, važi i u skupu \mathbb{Q} , ali druga, Kantorova⁶, ne.

Teorema 1.7. (Arhimedov princip.) *Za dato proizvoljno $x > 0$ i svako $y \in \mathbb{R}$, postoji jedinstveno određen ceo broj n tako da važi $(n-1)x \leq y < nx$.*

Dokaz. Kako skup \mathbb{Z} nije ograničen sa gornje strane to podskup celih brojeva

$$\left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{y}{x} < n \right\}$$

nije prazan i ograničen je sa donje strane. Zato postoji njegov minimalni element (koji je jedinstven) n , koji zato zadovoljava nejednakosti $(n-1)x \leq \frac{y}{x} < nx$. Kako je $x > 0$ to odatle sledi tražena nejednakost. \square

Napomena. Najveći ceo broja $x \in \mathbb{R}$, u oznaci $[x]$, je najveći ceo broj manji ili jednak od x .

Neke posledice Arhimedovog principa 1.7 su sadržane u sledećoj teoremi.

Teorema 1.8.

- Za svako $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $0 < 1/n < |x|$.
- Ako za broj $x \geq 0$ važi: $\forall n \in \mathbb{N} (x < 1/n)$, tada je $x = 0$.
- Za svako $x \in \mathbb{R}$ postoje brojevi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $-n_1 < x < n_2$.
- Za svako $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveno $k_0 \in \mathbb{Z}$ takav da je $k_0 \leq x < k_0 + 1$.
- Za svako $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, postoji racionalan broj r , takav da je $x < r < y$.

Dokaz. **a)** Neka je $x \neq 0$ odnosno $|x| > 0$. Tada na osnovu Arhimedovog principa 1.7 sledi da za realne brojeve 1 i $|x|$ postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da važi $n|x| > 1$, ili $1/n < |x|$.

b) Ako bi bilo $x > 0$, tada bi iz a) sledilo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $x > 1/n$.

c) Kako je $1 > 0$, to postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $n \cdot 1 > x$. Analogno postoji $n' \in \mathbb{N}$ takvo da je $n' \cdot 1 > -x$, odnosno $-n' < x$. Za $n_1 = n'$ i $n_2 = n$, dobijamo tvrđenje.

d) Na osnovu Arhimedovog principa 1.7 sledi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $k \cdot 1 > |x| \geq x$, tj. $k > x$. Neka je k_0 najveći među brojevima $0, \pm 1, \dots, \pm k$ koji nije veći od x . Tada je $k_0 \leq x < k_0 + 1$. Po konstrukciji, k_0 je jedinstveno određen.

e) Ako je $x < y$, tada je $y - x > 0$, pa prema a) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1/n < y - x$.

⁵Arhimed (287–212 p.n.e.)

⁶G. F. Cantor (1845–1918)

Na osnovu d), postoji jedinstveno $p \in \mathbb{Z}$ takvo da je $p = [nx]$, tj. $p \leq nx < p + 1$. Tada je $p + 1 < ny$, jer bi $p + 1 \geq ny$ značilo

$$n(y - x) \leq p + 1 - p \Rightarrow y - x \leq 1/n,$$

što je kontradikcija. Kako je $(p + 1)/n \in \mathbb{Q}$ i $x < (p + 1)/n < y$, to za racionalan broj r možemo uzeti broj $(p + 1)/n$. \square

Definicija 1.13. Funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ je niz elemenata skupa X .

Teorema 1.9. (Koši⁷-Kantorov princip.) Neka je $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, niz zatvorenih intervala takvih da $m \geq n$ povlači $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$, tj. $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Tada je

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Ako za svako $\epsilon > 0$ postoji interval $[a_n, b_n]$ čija je dužina manja od $\epsilon > 0$, tada postoji tačno jedan broj $c \in \mathbb{R}$ koji leži u svim intervalima $[a_n, b_n]$.

Dokaz. Za bilo koja dva intervala $[a_n, b_n]$ i $[a_m, b_m]$ iz navedenog niza intervala uvek važi $a_n \leq b_m$. Naime, ako bismo pretpostavili da to nije tačno imali bismo $a_m \leq b_m < a_n \leq b_n$. Odatle bi sledilo da intervali $[a_n, b_n]$ i $[a_m, b_m]$ nemaju zajedničkih tačaka, suprotno pretpostavci da se radi o nizu intervala sa osobinom da je svaki sledeći sadržan u prethodnom. Zato skupovi $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i $Y = \{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ispunjavaju uslove aksioma **(R16)**, po kojem postoji tačka $c \in \mathbb{R}$ da $a_m \leq c \leq b_n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Odatle specijalno za $n = m$ dobijamo $a_n \leq c \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$), tj. c pripada svim intervalima $[a_n, b_n]$.

Na osnovu prvog dela teoreme sledi da je $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Znači, postoji realan broj c koji pripada svim intervalima, tj. $a_n \leq c \leq b_n$. Pretpostavimo da postoji još jedan broj $c_1 > c$ takav da je $a_n \leq c_1 \leq b_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada iz nejednakosti $a_n \leq c < c_1 < b_n$ sledi $0 < c_1 - c < b_n - a_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom teoreme da uvek postoji interval iz zadatog niza intervala čija se dužina može učiniti manjom od bilo kojeg unapred zadatog pozitivnog broja, pa i od $c_1 - c > 0$. \square

Geometrijska interpretacija

Uobičajeno je da se skupu realnih brojeva pridruži (bijekcijom) *brojna linija* na sledeći način. Na pravoj odredimo dve fiksne tačke kojima pridružimo sa leva

⁷A. Cauchy (1789–1857)

na desno prvo nulu 0 i zatim jedinicu 1. Time smo dobili jediničnu duž sa krajnjim tačkama koje odgovaraju 0 i 1. Tačke koje odgovaraju prirodnim brojevima $2, 3, \dots$ dobijamo tako što jediničnu duž prenosimo redom udesno. Dalje, tačke koje odgovaraju negativnim celim brojevima $-1, -2, -3, \dots$ dobijamo tako što jediničnu duž prenosimo redom ulevo. Time smo svim tačkama skupa \mathbb{Z} pridružili tačke na pravoj. Da bismo pridružili tačku proizvoljnom racionalnom broju $\frac{p}{q}$ prvo moramo jediničnu duž izdeliti na q (uzimamo q pozitivno) jednakih delova (po Talesovoj teoremi iz geometrije). Tada prva dobijena tačka u odnosu na 0 u toj podeli odgovara broju $\frac{1}{q}$. Prenoseći duž sa krajnjim tačkama 0 i $\frac{1}{q}$ p puta desno (ako je p pozitivno), odnosno levo (ako je p negativno) dobijamo tačku na pravoj koja odgovara broju $\frac{p}{q}$. Time smo svim tačkama skupa \mathbb{Q} pridružili tačke na pravoj. Da bismo sada uvideli da se i svakom realnom (tačnije, iracionalnom) broju može pridružiti odgovarajuća tačka na pravoj primetimo da svaki realan broj c uvek možemo smestiti u niz zatvorenih intervala čije su krajnje tačke racionalni brojevi, sa osobinom da je svaki sledeći sadržan u prethodnom intervalu i čija je dužina polovina dužine prethodnog intervala.

Važni podskupovi skupa \mathbb{R} su *intervali* sa krajnjim tačkama a i b , gde je $a < b$.

Otvoren interval je skup $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Zatvoren interval je skup $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

Intervali su i skupovi

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \quad \text{i} \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Primetimo da su svi ovi intervali *ograničeni*.

Neograničeni intervali su sledeći skupovi:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \quad \text{i} \quad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \quad \text{i} \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Apsolutna vrednost

Apsolutna vrednost realnog broja x je data sa

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Neposredna posledica ove definicije je da za svaki realan broj x važi

$$|x| = |-x| \quad \text{i} \quad -|x| \leq x \leq |x|.$$

Apsolutna vrednost realnog broja je uvek nenegativan broj i predstavlja *rastojanje* između datog broja x i 0. Rastojanje između dva realna broja x i y definiše se kao $|x - y|$.

Ako je pozitivan realan broj, tada važi

$$|x| < a \text{ ako i samo ako je } -a < x < a;$$

$$|x| > a \text{ ako i samo ako je } x > a \text{ ili } x < -a;$$

$$|x| = a \text{ ako i samo ako je } x = a \text{ ili } x = -a.$$

Navedimo osobine apsolutne vrednosti vezane za operacije sabiranja i množenja, koje važe za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Primer 1.5. Pokazaćemo da za proizvoljne realne brojeve x i y važe sledeće osobine:

$$\mathbf{a)} \quad |x + y| \leq |x| + |y|; \quad \mathbf{b)} \quad |x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|$$

$$\mathbf{c)} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \quad \mathbf{d)} \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$$

a) Sabiranjem nejednakosti $-|x| \leq x \leq |x|$ i $-|y| \leq y \leq |y|$, dobijamo

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \quad \text{ili} \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

b) Na osnovu osobine dokazane pod a) imamo

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{i} \quad |y| = |y - x + x| \leq |-(x - y)| + |x|.$$

Odavde je

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|.$$

Relacije **c)** i **d)** slede neposredno iz definicije apsolutne vrednosti.

Radi kraćeg pisanja koristi se oznaka

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

gde su x_1, x_2, \dots, x_n proizvoljni realni brojevi. Ostavljamo čitaocu da pokaže da za sve $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ važi sledeća nejednakost:

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

1.2.6 Skup \mathbb{R} kao topološki prostor

Hajne-Borelova osobina

Definicija 1.14. *Familija skupova $\{B_i \mid i \in I\}$ je pokrivač skupa $A \subset \mathbb{R}$ ako za svako $x \in A$ postoji indeks i iz indeksnog skupa I takav da je $x \in B_i$, tj. $A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$.*

Teorema 1.10. (Hajne⁸-Borelova⁹ osobina.) *Iz svakog pokrivača zatvorenog intervala $[a, b]$ otvorenim intervalima može se izdvojiti konačan potpokrivač.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji pokrivač O od otvorenih intervala za interval $[a, b] = I_1$ koji nema konačan potpokrivač. Podelimo interval I_1 na dva jednaka dela i obeležimo sa $I_2 = [a_2, b_2]$ onu polovinu intervala $[a, b]$ sa osobinom da familija O nema konačan potpokrivač skupa $[a_2, b_2]$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do niza zatvorenih intervala $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, sa osobinom da je svaki sadržan u prethodnom; očevidno je dužina od I_n jednaka $\frac{b-a}{2^n}$. Na osnovu Koši-Kantorovog principa sledi da postoji jedinstven realan broj c sadržan u svakom od intervala $[a_n, b_n]$.

Kako $c \in I_1 = [a, b]$ postoji otvoren interval (δ, ϵ) iz familije O otvorenih intervala koji sadrži tačku c . Uzimajući $\delta = \min(c - \delta, \epsilon - c)$ uvek možemo naći I_n čija je dužina manja od δ . No tada $I_n \subset (\delta, \epsilon)$, tj. I_n smo pokrili sa samo jednim otvorenim intervalom (δ, ϵ) , iako smo pretpostavili da ne postoji konačan pokrivač bilo kojeg od tih intervala. \square

Bolcano-Vajerštrasov princip

Često se pojavljuje potreba da preciziramo kada je tačka x "bliska" tački x_0 ("malo se razlikuje" od x_0). Da je neka tačka x "blizu" tačke x_0 možemo opisati tako što će njeno rastojanje od x_0 biti manje od dovoljno malog broja $\epsilon > 0$. Broj ϵ je onda merilo "blizine" tačaka x i x_0 . Ovo zapisujemo $|x - x_0| < \epsilon$, tj. po definiciji apsolutne vrednosti $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$, odnosno $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Definicija 1.15. *Okolina tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ je svaki otvoren interval koji sadrži tačku x_0 .*

Za specijalan otvoren interval $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, gde je $\epsilon > 0$, obično kažemo da je simetrična ϵ -okolina tačke x_0 .

Definicija 1.16. *Neka je A podskup skupa realnih brojeva \mathbb{R} .*

a) *Tačka $x_0 \in \mathbb{R}$ je tačka nagomilavanja skupa A ako u svakoj okolini tačke x_0*

⁸H. E. Heine (1821–1881)

⁹E. Borel (1871–1956)

postoji bar jedna tačka iz A različita od x_0 .

b) Tačka $x_0 \in A$ je izolovana tačka skupa A ako postoji okolina tačke x_0 koja ne sadrži druge tačke iz A sem tačke x_0 .

Pokazaćemo da ako je $x_0 \in \mathbb{R}$ tačka nagomilavanja skupa $A \subset \mathbb{R}$, tada u svakoj okolini tačke x_0 ima *beskonačno mnogo tačaka* iz A . Ako je $U(x_0) = (a, b)$ proizvoljna okolina tačke x_0 tada uvek postoji simetrična ϵ -okolina $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a, b)$ okolina tačke x_0 ($\epsilon \leq \min(|x_0 - a|, |b - x_0|)$). Kako je x_0 tačka nagomilavanja skupa A , prema definiciji 1.16 a) postoji element $x_1 \neq x_0$ iz A , $x_1 \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Stavimo $0 < \epsilon_1 \leq |x_0 - x_1|/2$. Tada u intervalu $(x_0 - \epsilon_1, x_0 + \epsilon_1)$ postoji element $x_2 \in A$ koji je različit i od x_0 i od x_1 . Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo beskonačno mnogo tačaka iz A koje leže u intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, dakle i u datoj okolini $U(x_0)$ tačke x_0 .

Sve tačke intervala $[a, b]$ su njegove tačke nagomilavanja. Skup

$$\{0, 1, 1/2, \dots, 1/2^n, \dots\}$$

ima tačku nagomilavanja 0. Skup $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ nema tačaka nagomilavanja. Konačan skup ne može imati tačku nagomilavanja.

Teorema 1.11. (Bolcano¹⁰-Vajerštrasov¹¹ princip) *Svaki beskonačan i ograničen podskup skupa \mathbb{R} ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

Dokaz. Neka je A beskonačan i ograničen podskup skupa realnih brojeva. Tada postoji zatvoren interval $[a, b]$ takav da je $A \subset [a, b]$. Pokažimo da je bar jedna tačka intervala $[a, b]$ tačka nagomilavanja skupa A .

Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaku tačku $x \in [a, b]$ postoji okolina $U(x)$ koja ne sadrži elemente iz skupa A ili ima konačno mnogo tačaka skupa A . Familija takvih okolina po svim $x \in [a, b]$ pokriva zatvoren interval $[a, b]$. Na osnovu teoreme 1.10 iz ove familije se može izdvojiti konačan pokrivač intervala $[a, b]$, a time i skupa A . Kako svaka od okolina sadrži najviše konačno mnogo elemenata skupa A , dobijamo da je skup A konačan, što je suprotno pretpostavci teoreme. \square

1.2.7 Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Definicija 1.17. *Skup X je prebrojiv ako je $X \sim \mathbb{N}$, tj. $\text{card } X = \text{card } \mathbb{N}$.*

Sada konačan skup možemo definisati i na sledeći način: skup X je *konačan* ako postoji takvo $n \in \mathbb{N}$ da je $X \sim \{1, 2, \dots, n\}$.

Važi sledeća teorema.

¹⁰B. Bolzano (1781–1848)

¹¹K. Weierstrass (1815–1897)

Teorema 1.12. *Beskonačni podskup prebrojivog skupa je prebrojiv. Unija konačno ili prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Svi skupovi brojeva \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} su beskonačni, skupovi \mathbb{N} , \mathbb{Z} i \mathbb{Q} su prebrojivi. Jednostavan primer neprebrojivog skupa daje sledeća teorema.

Teorema 1.13. *Skup realnih brojeva iz intervala $[0, 1]$ je neprebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme nije tačno, odnosno da je interval $[0, 1]$ prebrojiv skup. Tada postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, tj. $[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$. Pokazaćemo da postoji realan broj iz intervala $[0, 1]$ tako da on ne pripada $\{x_1, x_2, \dots\}$. Prvo odaberimo zatvoren podinterval $I_1 \subset [0, 1]$ tako da $x_1 \notin I_1$. Izaberimo sada zatvoren interval $I_2 \subset I_1$ tako da $x_2 \notin I_2$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo niz zatvorenih podintervala I_1, I_2, \dots intervala $[0, 1]$ tako da je $I_{n+1} \subset I_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Po Koši-Kantorovom principu postoji x iz intervala $[0, 1]$ tako da $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Po konstrukciji niza intervala I_1, I_2, \dots

$$x \notin \{x_1, x_2, \dots\},$$

jer ako bi bilo $x = x_{n_0}$ tada $x \notin I_{n_0}$, što bi povlačilo $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Kontardikcija, pa je zato tačno suprotno od polazne pretpostavke da je interval $[0, 1]$ prebrojiv, a to je da interval $[0, 1]$ nije prebrojiv. \square

Kako je funkcija $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, data sa $f(x) = (b-a)x + a$ bijekcija ($a < b$), to iz prethodne teoreme sledi da je *proizvoljan* zatvoreni interval $[a, b]$ neprebrojiv. Posebno, skupovi \mathbb{R} i \mathbb{C} nisu prebrojivi.

1.3 Realne funkcije

1.3.1 Osnovni pojmovi

Nadalje ćemo uglavnom posmatrati samo one funkcije čiji su domen i kodomen neki podskupovi skupa realnih brojeva \mathbb{R} . Takve funkcije se nazivaju *realne funkcije jedne realne promenljive*. Na njih primenjujemo sve ono što smo rekli i za opšte funkcije.

Na primer, funkcije $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$ i $g(x) = x$, $x \in (0, +\infty)$ su jednake, a funkcije $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ imaju različite skupove vrednosti, pa zato nisu jednake ($f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ i $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$). Funkcije $f(x) = \ln(x^4)$, $x \neq 0$, $g(x) = 4 \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ nisu jednake.

Prema prethodnom, funkcija $f : A \rightarrow B$ je zadata određivanjem trojke (A, B, f) . Međutim, često je funkcija data samo analitičkim izrazom (formulom) $y = f(x)$,

podrazumevajući pri tom skupove A i B kojima pripadaju nezavisna i zavisna promenljiva. Najveći (u smislu relacije \subset) podskup skupa realnih brojeva \mathbb{R} za koji data formula ima smisla, zvaćemo *prirodnim definicionim skupom* D_f funkcije f .

Primer 1.6. Odredićemo prirodni definicioni skup D_f za sledeće funkcije:

a) $f(x) = \sqrt{2x-5}$; **b)** $f(x) = \sqrt{9-x^2}$.

a) Kako je $2x-5 \geq 0$ za $x \geq 5/2$, to je interval $D_f = [5/2, +\infty)$ prirodni definicioni skup za datu funkciju.

b) Dati izraz ima smisla za $9-x^2 \geq 0$, tj. za $(3-x)(3+x) \geq 0$. Kako je

$$3-x \geq 0 \text{ za } x \leq 3 \text{ i } 3+x \geq 0 \text{ za } x \geq -3, \text{ to za } x \in [-3, 3] \text{ važi } 9-x^2 \geq 0.$$

Međutim, iz nejednakosti

$$3-x \leq 0 \text{ za } x \geq 3 \text{ i } 3+x \leq 0 \text{ za } x \leq -3$$

sledi da je skup x -ova za koje je u isto vreme $3-x \leq 0$ i $3+x \leq 0$ prazan.

Znači da važi $9-x^2 \geq 0 \iff x \in [-3, 3]$, te je skup $[-3, 3]$ traženi prirodni definicioni skup D_f za funkciju f .

Primer 1.7. Funkcije f i g su date sa

a) $f(x) = x+3$, $g(x) = 2x - \sqrt{x}$; **b)** $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

Odredićemo složene funkcije $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$ i $(f \circ f \circ f)(x)$.

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x - \sqrt{x}) + 3 = 2x + 3 - \sqrt{x}$;

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x+3) - \sqrt{x+3} = 2x + 6 - \sqrt{x+3}.$$

Primetimo da je, na primer, $(f \circ g)(1) = 4$ i $(g \circ f)(1) = 6$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x+3) + 3 = x+6;$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x+6) = (x+6) + 3 = x+9.$$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$;

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 - 1;$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2;$$

$$\begin{aligned} (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(x^4 + 2x^2 + 2) = (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1 \\ &= x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5. \end{aligned}$$

Primer 1.8. Odredićemo inverznu funkciju g za datu funkciju f , gde je

- a) $f(x) = 3x + 1$, $x \in (-, +)$; b) $f(x) = x^2$, $x \in (-, 0)$;
 c) $f(x) = x^2$, $x \in (0, +)$; d) $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \in (-, -1) \cup (1, +)$.

a) Skup vrednosti date funkcije je interval $(-, +)$, što postaje definicioni skup za inverznu funkciju, pa iz relacije $x = 3y + 1$ (razmenom mesta x i y) rešavajući po y sledi da je inverzna funkcija g za funkciju f data sa

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}, \quad x \in (-, +).$$

b) $g(x) = f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, za $x \in (0, +)$.

c) $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, za $x \in (0, +)$.

d) Iz relacije $x = \frac{1-y}{1+y}$, posle sređivanja dobijamo inverznu funkciju

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \in (-, -1) \cup (1, +).$$

Znači, za datu funkciju f važi da je $f(x) = g(x) = f^{-1}(x)$ za sve $x \in (-, -1) \cup (1, +)$.

Podsetićemo se da je *grafik funkcije* $f : A \rightarrow B$ podskup G_f skupa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dat sa

$$G_f = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in A \right\}.$$

Broj $x_0 \in A$ je *nula* funkcije $f : A \rightarrow B$, ako je $f(x_0) = 0$. Geometrijski, nule funkcije f su preseki njenog grafika G_f sa x -osom.

Skup $A \subset \mathbb{R}$ je *simetričan* (prema koordinatnom početku) ako za sve $x \in A$ važi $-x \in A$.

Funkcija $f : A \rightarrow B$, gde je skup A simetričan, je *parna*, ako važi

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = f(x).$$

Geometrijski, to znači da je grafik parne funkcije osno simetričan u odnosu na y -osu.

Funkcija $f : A \rightarrow B$, gde je skup A simetričan, je *neparna*, ako važi

$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = -f(x).$$

Geometrijski, to znači da je grafik neparne funkcije centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Funkcija može biti ili parna, ili neparna ili ni parna ni neparna, a jedine trivijalne funkcije koje su i parne i neparne su funkcije identički jednake nuli na svom simetričnom domenu.

Primer 1.9. Ispitaćemo parnost, odnosno neparnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:

a) $f(x) = x^2 + 1$; b) $f(x) = \sin x + x$.

a) Kako je za svako $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$, to je funkcija f parna.

b) Kako je za svako $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \sin(-x) + (-x) = -\sin x - x = -(\sin x + x) = -f(x),$$

to je funkcija f neparna.

Funkcija f je ograničena na skupu $X \subset A$ ako postoje $m, M \in \mathbb{R}$ sa osobinom $(\forall x \in X) \ m \leq f(x) \leq M$, ili, ekvivalentno, ako postoji $C > 0$ sa osobinom $(\forall x \in X) \ |f(x)| \leq C$.

Funkcija $f : A \rightarrow B$ je periodična na A ako postoji realan broj $\neq 0$ sa osobinom

$$(\forall x \in A) \ f(x +) = f(x).$$

Broj se tada naziva period funkcije $f : A \rightarrow B$.

Osnovni period funkcije f je najmanji pozitivni period te funkcije (ako postoji).

Na primer, funkcija $f(x) = A \cdot \sin(x +)$, $x \in \mathbb{R}$, uz uslove $A \neq 0$, $\neq 0$, je periodična sa osnovnom periodom $\frac{2}{| |}$. (Pokažite to!) Funkcija $y(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, je periodična sa proizvoljnom periodom $T > 0$, ali nema osnovni period.

Primer 1.10. Odredićemo periodičnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:

a) $f(x) = 2 \sin 5x$; b) $f(x) = \cos 3x + 3 \sin 3x$.

a) Funkcija je periodična sa osnovnom periodom $\frac{2}{5}$.

b) Funkcija je periodična sa periodom $\frac{2}{3}$.

Ako je ispunjen jedan od sledeća četiri uslova za funkciju f , kažemo da je f monotona funkcija.

1. Funkcija $f : A \rightarrow B$ raste na A , ako za svaki par x_1, x_2 tačkaka iz skupa A važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

2. Funkcija $f : A \rightarrow B$ ne opada na A , ako za svaki par x_1, x_2 tačkaka iz skupa A važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

3. Funkcija $f : A \rightarrow B$ ne raste na A , ako za svaki par x_1, x_2 tačkaka iz skupa A važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

4. Funkcija $f : A \rightarrow B$ opada na A , ako za svaki par x_1, x_2 tačkaka iz skupa A važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcija $f : A \rightarrow B$ ima *lokalni maksimum* (respektivno *strogi lokalni maksimum*) u tački $x_0 \in A$ ako postoji okolina $U(x_0) = (a, b)$ tačke x_0 sa osobinom da važi

$$x \in (a, b) \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(respektivno $x \in (a, b) \cap A \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$);

Funkcija $f : A \rightarrow B$ ima *lokalni minimum* (respektivno *strogi lokalni minimum*) u tački $x_0 \in A$ ako postoji okolina $U(x_0) = (a, b)$ tačke x_0 sa osobinom da važi

$$x \in (a, b) \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

(respektivno $(x \in (a, b) \cap A) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$).

Za izraze "maksimum" i "minimum" koristi se i zajednički termin "ekstremna vrednost", ili, kraće, "ekstrem".

1.3.2 Elementarne funkcije

Stepena funkcija

Primer 1.11. U istom koordinatnom sistemu nacrtaćemo grafike sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = x^6;$

b) $f(x) = -x^2, \quad g(x) = -x^4, \quad h(x) = -x^6;$

c) $f(x) = x, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^5;$

d) Sve funkcije u ovom zadatku imaju za svoje prirodne definicione skupove isti skup, naime skup realnih brojeva i imaju jednu nulu u tački $x = 0$.

a) Skup vrednosti sve tri funkcije je interval $[0, +\infty)$ i parne su. Sve tri funkcije opadaju nad $(-\infty, 0)$, a rastu nad $(0, +\infty)$, pa imaju (lokalni i globalni) minimum u tački $x = 0$ (sl. 1.1).

b) Skup vrednosti ove tri funkcije je interval $(-\infty, 0]$ i parne su. Sve tri funkcije rastu nad $(-\infty, 0)$, a opadaju nad $(0, +\infty)$, pa imaju (lokalni i globalni) maksimum u tački $x = 0$ (sl. 1.2).

c) Skup vrednosti ovih funkcija je skup \mathbb{R} . Sve tri funkcije su neparne, rastuće funkcije na \mathbb{R} . (sl. 1.3).

d) Skup vrednosti ovih neparnih opadajućih funkcija je \mathbb{R} (sl. 1.4).

Uopšte važi za $s \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ da je (videti detaljnije u glavi 3):

$$x^s = a^{s \log_a x} \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Polinomi

Funkcija

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

gde su koeficijenti $a_j, j = 0, 1, \dots, n$, realni brojevi, naziva se *polinom* stepena $n \in \mathbb{N}$, ako je koeficijent $a_n \neq 0$. Po definiciji uzimamo da je *konstanta polinom nultog stepena*. Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su koeficijenti uz iste stepene jednaki.

Polinom $P_n(x)$ posmatramo i za $x \in \mathbb{C}$. Tada je broj $x_0 \in \mathbb{C}$ *nula* polinoma $P_n(x)$, ako je $P_n(x_0) = 0$. Ako je broj x_0 nula polinoma $P_n(x)$, koji je racionalan, realan odn. kompleksan broj, tu nulu ćemo zvati racionalnom, realnom odn. kompleksnom nulom tog polinoma.

Teorema 1.14. (Osnovni stav algebre.) *Svaki polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.*

Ako je x_0 realna nula polinoma $P_n(x)$, tada postoji polinom sa realnim koeficijentima $Q_{n-1}(x)$, gde je $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$, stepena $n-1$, tako da važi

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x). \quad (1.5)$$

Broj $x_0 \in \mathbb{R}$ je realna nula m -tog reda polinoma $P_n(x)$ iz (1.4), ako postoji polinom sa realnim koeficijentima $R_{n-m}(x)$, stepena $n-m$, takav da je $R_{n-m}(x_0) \neq 0$ i važi

$$P_n(x) = (x - x_0)^m R_{n-m}(x).$$

Uopšte, svaki se polinom $P_n(x)$ sa realnim koeficijentima, oblika (1.4), stepena n , može na jedinstven način napisati kao proizvod

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{l_1} \dots (x^2 + b_sx + c_s)^{l_s}, \quad (1.6)$$

gde za prirodne brojeve m_j , $j = 1, \dots, r$, i prirodne brojeve l_k , $k = 1, \dots, s$, važi

$$n = m_1 + \dots + m_r + 2(l_1 + \dots + l_s).$$

U relaciji (1.6) x_j su međusobno različite realne nule polinoma $P_n(x)$, reda m_j , $j = 1, \dots, r$, dok su nule kvadratnih trinoma $x^2 + b_kx + c_k$, $k = 1, \dots, s$, konjugovano-kompleksne nule polinoma $P_n(x)$.

Iz prethodne teoreme 1.14 sledi:

Za svaki polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ postoji tačno n (realnih i/ili kompleksnih) nula, među kojima može biti i jednakih.

Naći realne nule polinoma iz (1.4) je, u opštem slučaju, složen zadatak. Što se tiče racionalnih nula tog polinoma, uz dodatni uslov da su svi koeficijenti a_j , $j = 0, 1, \dots, n$, celi brojevi, važi sledeće jednostavno tvrđenje.

Teorema 1.15. *Neka je $P_n(x)$ polinom iz (1.4) sa celim koeficijentima. Ako je razlomak p/q nula polinoma $P_n(x)$, gde su $p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi (tj. razlomak p/q se ne može uprostiti), tada važi:*

1. imenilac p je činilac slobodnog člana a_0 ;
2. brojilac q je činilac koeficijenta a_n .

Teorema 1.15 daje potencijalne racionalne nule datog polinoma sa celim koeficijentima. Postupak koji omogućava da se odrede koeficijenti b_0, b_1, \dots, b_{n-1} polinoma $Q_{n-1}(x)$ iz (1.5) i proveriti da li su potencijalne vrednosti zaista nule datog polinoma, naziva se *Hornerova shema*.

Objasnićemo primenu Hornerove sheme. Neka je $x = x_0$ moguća racionalna nula datog polinoma, određena na osnovu teoreme 1.15. Stavimo

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0 b_{n-1} + a_{n-1}, \dots, \quad b_0 = x_0 b_1 + a_1,$$

odnosno, u opštem slučaju,

$$b_k = x_0 b_{k+1} + a_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Osim toga, neka je

$$r = x_0 b_0 + a_0.$$

Sada postoje dve mogućnosti:

1. ako je $r = 0$, tada je $x = x_0$ nula posmatranog polinoma;
2. ako je, međutim, $r \neq 0$, tada pretpostavljena vrednost $x = x_0$ nije nula posmatranog polinoma.

U praksi, to se proverava na sledeći način:

Prvo se ispišu *svi* koeficijenti datog polinoma, tj. uključujući i one koji su jednaki nuli. Na osnovu gornjih jednakosti za koeficijente b_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, i broj r pravi se sledeća shema:

$$\begin{array}{cccccccc|c} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_k & \dots & a_0 & & x = x_0 \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_k & \dots & b_0 & & r \end{array}$$

i primeni gornja analiza o odnosu brojeva r i 0 .

Primer 1.12. Odredićemo racionalne nule polinoma $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Za dati polinom posmatrajmo delitelje broja 12, jer je $a_0 = 12$. To su brojevi

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$$

Kako je $a_n = a_3 = 1$, to su ovi celi brojevi i jedine moguće racionalne nule datog polinoma. Ispitaćemo da li je $x = 1$ nula posmatranog polinoma:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -12 & x = 1 \\ & 1 & 4 & 0 & -12. \end{array}$$

Drugi red u ovoj shemi je dobijen u skladu sa prethodno objašnjenom Hornerovom shemom. Prvi broj u drugom redu, 1, se prepíše iz prvog reda i upíše u drugu kolonu. Zatim se nalaze brojevi $4 = 1 \cdot 1 + 3$, $1 \cdot 4 + (-4) = 0$ i konačno se dobija ostatak $1 \cdot 0 + (-12) = -12$.

Kako je zadnja cifra u drugom redu -12 (tj. $r = -12$, to $x = 1$ nije nula datog polinoma.

Ispitaćemo da li je $x = 2$ nula posmatranog polinoma:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -12 & x = 2 \\ & 1 & 5 & 6 & 0. \end{array}$$

Kako je zadnja cifra u drugom redu 0, (tj. $r = 0$), to je $x = 2$ nula datog polinoma. Prema tome važi

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x^2 + 5x + 6).$$

Postupak se dalje nastavlja, tako što se sada traže nule novog polinoma drugog stepena. To se sada može uraditi ili rešavanjem kvadratne jednačine $Q_2(x) = x^2 + 5x + 6 = 0$, ili, kao što ćemo mi to uraditi, ponovo pomoću Hornerove sheme.

Ako proverimo da li je $x = -2$ nula polinoma $Q_2(x)$, tada imamo

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & x = -2 \\ & 1 & 3 & 0, \end{array}$$

što znači da je druga nula polinoma $P_3(x)$, broj $x = -2$. Analognom proverom takođe se pokazuje da je treća nula -3 . Prema tome, važi

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x - 2)(x + 2)(x + 3).$$

Racionalne funkcije

Funkcija

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid P_n(x) = 0\}, \quad (1.7)$$

gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n odnosno m , naziva se *racionalna funkcija*.

Posebno značajni primeri racionalnih funkcija su *elementarne racionalne funkcije*

$$\frac{A}{(x-a)^j}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \text{i} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

gde su nule polinoma $x^2 + px + q$ konjugovano-kompleksne.

Teorema 1.16. *Racionalna funkcija oblika (1.7) se može na jedinstven način napisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika (1.8), i, ako je $m \geq n$, još jednog polinoma stepena manjeg ili jednakog sa $m - n$.*

Teorema 1.16 će biti posebno značajna kod izračunavanja neodređenih integrala racionalnih funkcija, gde se može naći još više detalja o racionalnim funkcijama.

Slika 1.5. $f(x) = a^x$

Slika 1.6. $f(x) = \log_a x$

Eksponecijalne i logaritamske funkcije

Eksponecijalna funkcija $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, raste za $a > 1$ (slika 1.5 za $a = 2$) i opada za $0 < a < 1$ (slika 1.5 za $a = 1/2$ - isprekidana linija). Funkcija f je pozitivna za sve $x \in \mathbb{R}$, pa nema nula. Eksponecijalna funkcija bijektivno preslikava \mathbb{R} na $(0, +\infty)$. U 3. glavi ćemo datu preciznu definiciju eksponecijalne funkcije.

Primer 1.13. Nacrtaćemo grafik funkcije $f(x) = e^{-(x-2)^2}$ (*Gausova*¹² *kriva*) (sl. 1.7).

Slika 1.7.

Funkcija f je definisana na intervalu $(-\infty, +\infty)$, skup vrednosti je interval $(0, 1)$, ima maksimum u tački $x = 2$ i ograničena je na svom definicionom skupu, jer je $0 < f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ (sl. 1.7).

Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, je inverzna za eksponecijalnu funkciju $y = a^x$. Funkcija raste za $a > 1$ (slika 1.6 za $a = 2$) i opada za $0 < a < 1$ (slika 1.6 za $a = 1/2$ - isprekidana linija). Nula funkcije je $x = 1$. U 3. glavi ćemo datu preciznu definiciju logaritamske funkcije.

Trigonometrijske funkcije

U ovom potpoglavlju k uvek označava ceo broj, tj. $k \in \mathbb{Z}$.

Funkcija $f(x) = \sin x$ je definisana za sve $x \in \mathbb{R}$, i njen skup vrednosti je interval $[-1, 1]$. Neparna je i periodična sa osnovnom periodom 2π . Nule su u tačkama $x = k\pi$. Na intervalu oblika $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ raste, a opada na intervalu oblika $(\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$. Funkcija ima maksimume u tačkama $x = (4k + 1)\pi/2$, a minimume u tačkama $x = (4k + 3)\pi/2$ (slika 1.8).

Slika 1.8. $f(x) = \sin x$

Slika 1.9. $f(x) = \cos x$

Funkcija $f(x) = \cos x$ je definisana za sve $x \in \mathbb{R}$, i njen skup vrednosti je interval $[-1, 1]$. Funkcija je parna i periodična sa osnovnom periodom 2π . Nule funkcije su u tačkama $x = \pi/2 + k\pi$. Na intervalu oblika $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ opada, a na intervalu oblika $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$ raste. Funkcija ima maksimume u tačkama $x = 2k\pi$, a minimume u tačkama $x = (2k + 1)\pi$ (slika 1.9).

Slika 1.10. $f(x) = \operatorname{tg} x$

Slika 1.11. $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Funkcija $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ je definisana za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\cos x \neq 0$, tj. na skupu $\mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Skup vrednosti je \mathbb{R} . Funkcija je neparna i periodična sa osnovnom periodom π . Nule funkcije su u tačkama $x = k\pi$. Nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ raste. Vertikalne asimptote

¹²K. F. Gauss (1777–1855)

(videti treću glavu) grafika su prave $x = (2k + 1) \pi / 2$ (slika 1.10).

Funkcija $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ je definisana za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $\sin x \neq 0$, tj. na skupu $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Skup vrednosti je \mathbb{R} . Funkcija je parna i periodična sa osnovnom periodom π . Nule funkcije su u tačkama $x = (2k + 1) \pi / 2$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti, i na intervalu oblika $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ opada. Vertikalne asimptote (videti treću glavu) grafika su prave $x = k\pi$ (slika 1.11).

Inverzne trigonometrijske funkcije (ciklometrijske funkcije)

Osnovne trigonometrijske funkcije *nisu* monotone na svojim definicionim skupovima. Zbog toga, da bi se uopšte mogla definisati inverzna funkcija bilo koje od njih, potrebno je prvo izvršiti restrikciju polazne osnovne trigonometrijske funkcije na interval (po mogućstvu što veći!) na kome ona jeste monotona. Inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija dobijaju prefiks "arc", tj. arcsin, arccos, arctg i arcctg.

Funkcija $f(x) = \arcsin x$ je, po definiciji, inverzna funkcija za funkciju $F_1(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, koja je restrikcija funkcije $F(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, na interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Važno je primetiti da na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ funkcija F_1 raste, a da je njen skup vrednosti interval $[-1, 1]$. Zbog toga je definicioni skup funkcije f interval $[-1, 1]$, a njen skup vrednosti interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Dalje, funkcija f je neparna, rastuća i ima nulu u $x = 0$ (slika 1.12). Na slikama 1.12-1.15 isprekidanim linijama su nacrtane trigonometrijske funkcije, a sa punim linijama njihove odgovarajuće inverzne funkcije.

Slika 1.12. $f(x) = \arcsin x$

Slika 1.13. $f(x) = \arccos x$

Funkcija $f(x) = \arccos x$ je, po definiciji, inverzna za monotonu funkciju $F_1 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ datu sa $F_1(x) = \cos x$, koja je bijekcija. (Proveriti!) Definicioni skup funkcije f je interval $[-1, 1]$, skup vrednosti je interval $[0, \pi]$, i opada (slika 1.13).

Funkcija $f(x) = \arctg x$ je, po definiciji, inverzna za monotonu funkciju $F_1 : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, datu sa $F_1(x) = \operatorname{tg} x$. Funkcija f je definisana na celom skupu \mathbb{R} , njen skup vrednosti je $(-\pi/2, \pi/2)$, rastuća je i neparna (slika 1.14).

Funkcija $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ je, po definiciji, inverzna za monotonu funkciju $F_1 : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, datu sa $F_1(x) = \operatorname{ctg} x$. Funkcija f je definisana na celom skupu \mathbb{R} , njen skup vrednosti je $(0, \pi)$, i opadajuća je. Ova funkcija nije ni parna ni neparna (slika 1.15).

Primer 1.14. Nacrtaćemo grafike sledećih funkcija:

a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

a) Funkcija $\arcsin x$ je definisana na intervalu $[-1, 1]$, te važi $f(x) = x$, $x \in [-1, 1]$ (slika 1.16).

Slika 1.16. $f(x) = \sin(\arcsin x)$

Slika 1.17. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

b) Funkcija $\arcsin(\sin x)$ je definisana na celom skupu \mathbb{R} , jer je $|\sin x| \leq 1$. Periodična je sa periodom 2π , i važi (slika 1.17): $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2; \\ -x, & \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2. \end{cases}$

Definicija 1.18. Osnovne elementarne funkcije su:

stepena funkcija: $f(x) = x^s$, $x \in (0, +\infty)$, za fiksno $s \in \mathbb{R}$ (specijalno za $s = 0$ data funkcija je konstanta);

eksponencijalna funkcija: $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ i $a \neq 1$;

logaritamska funkcija: $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ $a > 0$ i $a \neq 1$;

trigonometrijske funkcije: $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

inverzne trigonometrijske funkcije (ciklometrijske funkcije) (sa eventualnom restrikcijom domena).

Elementarna funkcija je svaka osnovna elementarna funkcija i funkcija koja se dobija primenom konačnog broja algebarskih operacija: sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, i operacije kompozicije funkcija, na osnovne elementarne funkcije.

1.3.3 Parametarsko zadavanje krivih

Neka su na intervalu $I = [a, b]$ date dve funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$, $t \in I$. Skup svih tačaka ravni koje su određene koordinatama $(x(t), y(t))$, $t \in I$ (uz dodatne uslove o diferencijabilnosti funkcija x i y , detaljnije u 4. glavi i Analizi II), predstavlja krivu datu parametarski.

Primer 1.15. Nacrtati krive date parametarski, ako je $a > 0$, $t \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = at/(1+t^3), \\ y = at^2/(1+t^3). \end{cases}$

Prva kriva se naziva cikloida, druga astroida, a treća Dekartov list.

Slika 1.18. Cikloida.

Slika 1.19. Astroida.

a) Funkcija $y = f(x)$ je definisana na skupu \mathbb{R} , i po t periodična sa periodom 2π . Na osnovu sledeće tabele, možemo nacrtati cikloidu (slika 1.18 za $a=1$):

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$a(1 - \sqrt{2}/2)$	$a(1/2 - 1)$	$a(3/4 - \sqrt{2}/2)$	a	$a(3/2 + 1)$	$2a$
y	0	$a(1 - \sqrt{2}/2)$	a	$a(1 + \sqrt{2}/2)$	$2a$	a	0

Slika 1.20. Dekartov list.

Slika 1.21. Arhimedova spirala.

b) Ako je $0 \leq t \leq \pi/2$, tada je $0 \leq x \leq a$ ($t = 0, x = a, y = 0, t = \pi/2, x = 0, y = a$). Ako je $\pi/2 \leq t \leq \pi$, tada je $-a \leq x \leq 0$ ($t = \pi, x = -a, y = 0$). Astroida je predstavljena na sl. 1.19 (za $a=1$).

c) Za $a = 3$ imamo grafik Dekartovog lista, sl. 1.20.

1.3.4 Krive date u polarnim koordinatama

Za svaku tačku $A(x, y)$ ravni, izuzev koordinatnog početka $O(0, 0)$, postoje jednoznačno određeni polarni ugao $\varphi \in [0, 2\pi)$ i polarni radijus ili poteg $\rho \in (0, +\infty)$ takvi da je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$. Za par (ρ, φ) se kaže da su polarne koordinate tačke A (slika 1.22).

Primer 1.16. Nacrtaćemo sledeće krive zadate u polarnim koordinatama ($a > 0$):

- a) $\rho = a$ (Arhimedova spirala); b) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioida);
 c) $\rho = a^2 \cos(2\varphi)$ (Bernulijeva lemniskata).

a) Na slici 1.21 predstavljena je Arhimedova spirala za $a = 1$. Primetimo da kada polarni ugao raste od 0 do 2π , tada i polarni radijus raste od 0 do 2π .

b) Na osnovu sledeće tabele možemo nacrtati kardioidu (slika 1.24 za $a = 1$):

	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	2π
	$2a$	$a(1 + \sqrt{2}/2)$	a	$a(1 - \sqrt{2}/2)$	0	a	$2a$

c) Funkcija $\rho = a^2 \cos(2\varphi)$ je definisana za $\cos 2\varphi \geq 0$, tj. za $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4]$ (slika 1.25).

Glava 2

Nizovi

2.1 Osnovni pojmovi

Definicija 2.1. Realni niz je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Uobičajeno je da se piše $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Broj a_n se zove *opšti član* niza a sam niz označavamo sa $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ili kraće (a_n) .

Primer 2.1. Navodimo nekoliko nizova sa opštim članom i nekoliko njihovih prvih članova.

Opšti član	Članovi niza	Opšti član	Članovi niza
$a_n = \frac{1}{n}$,	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$,	$b_n = 1 - \frac{1}{n}$,	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$,
$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$,	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$,	$d_n = n$,	$1, 2, 3, 4, \dots$,
$e_n = (-1)^n n$,	$-1, 2, -3, 4, \dots$,	$f_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$,

Definicija 2.2. Niz $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je ograničen ako postoji pozitivan realan broj M takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$|a_n| \leq M, \quad \text{tj.} \quad -M \leq a_n \leq M.$$

Geometrijski, to znači da su svi članovi niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ smešteni u interval $[-M, M]$.

Primer 2.2. Nizovi iz primera 2.1 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su ograničeni sa 1; niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen je sa $\frac{1}{2}$, dok nizovi $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nisu ograničeni.

Primer 2.3. Nizovi **a)** $x_n = 2^{n(-1)^n}$ i **b)** $x_n = n^{(-1)^n}$ su neograničeni. Proveriti!

2.2 Granična vrednost niza

2.2.1 Definicija konvergentnog niza

Izdvajamo sada nizove koji imaju osobinu da se članovi niza "približavaju" nekom fiksnom broju, tj. rastojanje do tog fiksnog broja i članova niza (sem konačnog broja) može da se učiniti proizvoljno malo.

Definicija 2.3. *Realan broj L je granična vrednost niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da za svaki prirodan broj $n > n_0$ važi $|a_n - L| < \epsilon$.*

Slika 2.1.

Ako je L granična vrednost (kraće: *granica*) niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tada još kažemo da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka broju L i pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Primetimo da se uz pomoć pojma okoline (definicija 1.16) prethodna definicija može i ovako iskazati:

Realan broj L je granična vrednost niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako za svaku ϵ -okolinu $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da za svaki prirodan broj $n > n_0$ važi $a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$ (sl. 2.1).

U prethodnoj formulaciji se umesto ϵ -okoline može uzeti i proizvoljna okolina, tj. otvoren interval, koji sadrži tačku L .

Pomoću logičkih simbola definicija 2.3 se može zapisati:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) (n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon).$$

Teorema 2.1. *Granica konvergentnog niza je jedinstvena.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima dve granice, i označimo ih sa L_1 i L_2 . Neka je, recimo, $L_1 > L_2$. Tada za $\epsilon = (L_1 - L_2)/3$ postoji n_0 takvo da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) n > n_0 \Rightarrow |a_n - L_1| < \epsilon.$$

Tada je $L_2 + \epsilon < L_1 - \epsilon$, jer je $L_1 - L_2 = 3\epsilon > 2\epsilon$, te kako je $a_n > L_1 - \epsilon$ za $n > n_0$ sledi da je $a_n > L_2 + \epsilon$ za $n > n_0$. To znači da u intervalu $(L_2 - \epsilon, L_2 + \epsilon)$ ima najviše konačno mnogo članova niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ne više od n_0), pa tačka L_2 ne može biti granica tog niza. \square

Primer 2.4. Koristeći definiciju 2.3, pokažimo da je svaki od sledećih nizova datih sa opštim članom konvergentan niz:

a) $a_n = \frac{1}{n}$; b) $b_n = \frac{1}{n}$, $\epsilon > 0$, oba sa granicom 0;

c) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$, sa granicom 1.

a) Treba pokazati da za svako unapred dato pozitivno ϵ postoji prirodan broj n_0 takav da važi implikacija

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \epsilon, \text{ odnosno } n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon. \quad (2.1)$$

Kako za svako n sa osobinom $n > \frac{1}{\epsilon}$ važi $\frac{1}{n} < \epsilon$, to možemo uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$, pa je (2.1) zadovoljeno.

Napomena. Broj $[x]$ (čita se: "najveći ceo od x ") po definiciji je najveći ceo broj manji ili jednak od realnog broja x .

b) Za dato $\epsilon > 0$ odredićemo prirodan broj n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Ako je ϵ pozitivan racionalan broj, tada iz zadnje nejednakosti sledi $n > \frac{1}{\epsilon}$, pa možemo uzeti da je $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + 1$.

Ako je, međutim, ϵ pozitivan iracionalan broj, tada postoji racionalan broj takav da važi $0 < \epsilon' < \epsilon$, odnosno $n < n'$, tako da je $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n'}$, pa možemo uzeti $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon'} \right] + 1$.

c) Za dato $\epsilon > 0$ iz relacije

$$\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| = \frac{1}{n+2} < \epsilon \text{ sledi } n+2 > \frac{1}{\epsilon} \text{ ili } n > \frac{1}{\epsilon} - 2.$$

Za n_0 se može uzeti bilo koji prirodan broj veći od broja $\frac{1}{\epsilon} - 2$. Da bismo bili sigurni da je izabrani broj n_0 prirodan, uzećemo (na primer) $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} - 2 \right] + 3$. Tada za svako $n > n_0$ važi $\left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| < \epsilon$.

2.2.2 Osobine konvergentnih nizova

Navešćemo sada neke važne osobine konvergentnih nizova.

Teorema 2.2. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz. Neka je dat niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji konvergira ka broju L , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. To znači da za proizvoljno $\epsilon > 0$, pa i za $\epsilon = 1$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve $n > n_0$ važi

$$|a_n - L| < 1, \quad \text{tj.} \quad L - 1 < a_n < L + 1.$$

Između konačno mnogo brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, L - 1$ i $L + 1$ možemo odrediti onaj koji ima najveću apsolutnu vrednost, i obeležimo ga sa M . Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|a_n| \leq M$. Prema definiciji 2.2, niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je ograničen. \square

Primetimo da niz koji je ograničen ne mora biti konvergentan, kako se vidi na primeru niza sa opštim članom $a_n = (-1)^n$.

Sledeća teorema daje odnos konvergentnih nizova prema relaciji poretka.

Teorema 2.3. *Ako su $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni nizovi, i ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$ (ili $(\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$), tada važi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.*

Dokaz. Obeležimo sa a i b granice nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ respektivno, i pretpostavimo da je, suprotno tvrđenju teoreme $a > b$.

Iz konvergencije nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sledi da za $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon,$$

odnosno

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_1 \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \ n > n_2 \Rightarrow b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Odavde sledi da za $n > n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ važi

$$b_n < b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} < a - \frac{a-b}{2} = a - \epsilon < a_n,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a_n \leq b_n$ za svako $n \geq n_3 \geq n_0$. \square

Napomena. Prisetimo da u specijalnom slučaju, kada je $b_n = M$ ($n \in \mathbb{N}$), iz teoreme 2.3 sledi da ako je konvergentni niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen sa gornje strane sa brojem M , tj. $a_n < M$ (ili $a_n \leq M$) da je tada $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$. Odavde sledi da za svaki konvergentan niz čiji su svi članovi u nekom zatvorenom intervalu $[a, b]$ i granica tog niza leži u intervalu $[a, b]$.

Sledeća teorema o uklještenju niza između dva konvergentna niza sa istom granicom omogućava dokaz konvergencije konkretnih nizova.

Teorema 2.4. Ako za nizove $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$, tada važi implikacija

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \right).$$

Dokaz. Prema pretpostavci, za dato $\epsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe implikacije

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_1 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \Rightarrow |c_n - L| < \epsilon.$$

Na osnovu toga za $n > n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ važi

$$L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon, \quad \text{te je} \quad |b_n - L| < \epsilon,$$

što znači da je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. □

Primer 2.5. Na osnovu teoreme 2.4, odredićemo sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$; c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$, $|q| < 1$.

a) Kako je $0 < \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, to je

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}.$$

Na osnovu primera 2.4 a) i teoreme 2.4 sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$. Primitimo da je uloga niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz teoreme 2.4 preuzeo niz sa opštim članom $a_n = 0$.

b) Na osnovu relacija

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2) \cdots 1} < \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}, \quad n > 2,$$

i jednakosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} = 0$, sledi (članovi datog niza su pozitivni) da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0.$$

c) Po binomnom obrascu važi

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 > n, \quad \text{dakle} \quad \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n},$$

pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$. Na osnovu teoreme 2.4 sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

d) Posmatraćemo prvo slučaj kada je $0 < q < 1$. Tada je $q = \frac{1}{1+h}$, $h > 0$, pa je $q^n = \frac{1}{(1+h)^n}$. Na osnovu Bernulijeve nejednakosti (1.1) i njene posledice

$$(1+h)^n > nh, \quad h > 0,$$

važi da je

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}.$$

Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0$, to je $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, za $0 < q < 1$.

Ako je $-1 < q < 0$, tada za $q_1 = -q$ važi $0 < q_1 < 1$, pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n q_1^n = 0.$$

Niz sa opštim članom q^n divergira (videti definiciju 2.4 na kraju ovog poglavlja) za $|q| \geq 1$ (dokažite to!).

Sledeća teorema daje odnos konvergentnih nizova prema algebarskim operacijama.

Teorema 2.5. *Ako nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiraju, tada važi*

$$\mathbf{a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

tj. granica zbira (respektivno razlike) konvergentnih nizova postoji i jednaka je zbiru (respektivno razlici) njihovih granica;

$$\mathbf{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

tj. granica proizvoda konvergentnih nizova postoji i jednaka je proizvodu njihovih granica;

$$\mathbf{c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{uz uslov } b_n \neq 0, \text{ za svako } n \in \mathbb{N} \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0,$$

tj., pod gornjim uslovima, granica količnika konvergentnih nizova postoji i jednaka je količniku njihovih granica.

Dokaz. Neka su brojevi a i b granice nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, respektivno.

a) Kako su nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentni, to za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe implikacije

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon/2 \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon/2.$$

Na osnovu toga, za $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ je

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje.

b) Prema teoremi 2.2 je svaki konvergentan niz ograničen, pa postoji konstanta $M_1 > 0$ sa osobinom da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M_1$. Stavimo sada $M = \max\{|a|, M_1\}$. Tada je $M > 0$. Za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe nejednakosti:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Na osnovu toga, za $n > n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ važi

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - a \cdot b| &= |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)| \\ &= |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq M \frac{\epsilon}{2M} + M \frac{\epsilon}{2M} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

c) Pod pretpostavkom da granica b niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nije nula, pokažimo da se može odrediti prirodan broj n_0 takav da važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \Rightarrow |b_n| \geq |b|/2.$$

Ovo sledi direktno iz definicije granične vrednosti niza (definicija 2.3). Drugim rečima, u intervalu $(-|b|/2, |b|/2)$ ima najviše konačno mnogo članova niza $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Iz konvergencije nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sledi da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 takvi da važe nejednakosti

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{|b|}{4} \quad \text{i} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} \cdot |b_n - b| < \frac{|b|}{4}.$$

Na osnovu toga za $n > n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ je

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n} \right| = \left| \frac{a_n \cdot b - a \cdot b + a \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{1}{|b_n|} \left(|a_n - a| + \frac{|a|}{|b|} |b_n - b| \right) \\ &< \frac{1}{|b|/2} \left(\frac{|b|}{4} + \frac{|b|}{4} \right) \leq \dots \quad \square \end{aligned}$$

Primer 2.6. Koristeći primer 2.4 b) i osnovne osobine konvergentnih nizova, odredićemo sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 - 3n^2 + 1}{n^5 + 3n + 2}$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 - 3n^2 + 1}{n^5 + 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 (2 - \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5})}{n^5 (1 + \frac{3}{n^4} + \frac{2}{n^5})} = 2$.

b) Racionalizacijom brojioca dobija se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.6. Ako je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan niz, tada važe sledeće jednakosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (A \cdot a_n) = A \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

gde je A proizvoljna konstanta različita od nule;

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^k, \quad \text{gde je } k \in \mathbb{N};$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \quad \text{gde je } k \in \mathbb{N}.$$

Ako je k paran broj, mora se dodatno pretpostaviti da su članovi niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativni.

Dokaz.

a) Sledi iz teoreme 2.5 b), ako se stavi $b_n = A$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Sledi primenom matematičke indukcije i tvrđenja iz teoreme 2.5 b).

c) Sledi iz b) posle smene $\sqrt[k]{a_n} = b_n$, tj. $a_n = (b_n)^k$, $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 2.7. (Bolcano-Vajerštras) *Svaki ograničen niz $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sadrži konvergentan podniz.*

Dokaz. Obeležimo sa S skup vrednosti funkcije a , tj.

$$S = \{a_n = a(n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ako je S konačan skup, u tom slučaju postoji $\ell \in S$ i strogo rastući niz prirodnih brojeva $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takav da važi $a_{n_1} = a_{n_2} = \dots = a_{n_k} = \dots = \ell$. Znači postoji (stacionarni) podniz $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koji konvergira.

Ako je S beskonačan skup, tada prema Bolcano–Vajerštrasovom principu 1.11 sledi da skup S ima bar jednu tačku nagomilavanja; obeležimo je sa ℓ . Prema definiciji tačke nagomilavanja *skupa*, u svakoj ε -okolini tačke ℓ ima bar jedan element skupa S , koji je različit od ℓ . Za $\varepsilon = 1$ postoji broj n_1 sa osobinom da je $0 < |a_{n_1} - \ell| < 1$. Dalje, za $\varepsilon = 1/2$ postoji broj $n_2 > n_1$ sa osobinom da je $0 < |a_{n_2} - \ell| < 1/2$. Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo strogo rastući niz $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ prirodnih brojeva sa osobinom da je $0 < |a_{n_k} - \ell| < 1/k$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Niz $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ je traženi konvergentni podniz niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Napomena. U dokazu prethodne teoreme je sadržano sledeće tvrđenje (videti poglavlje 2.7 o podnizovima i tački nagomilavanja niza):

Ako niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima tačku nagomilavanja ℓ tada postoji njegov podniz $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tako da $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$.

Za niz koji ne konvergira, kažemo da *divergira*. Izdvojićemo dve klase *divergentnih nizova*.

Definicija 2.4.

1. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergira u plus beskonačno, u oznaci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n > M$.
2. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergira u minus beskonačno, u oznaci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svako $n > n_0$ važi $a_n < -M$.

Očividno je da niz koji divergira u plus beskonačno ili u minus beskonačno ne može biti ograničen.

Niz sa opštim članom $d_n = n$ divergira u plus beskonačno (to je, u stvari, niz prirodnih brojeva), dok niz sa opštim članom $e_n = (-1)^n n$ jeste divergentan (tj. nije konvergentan), ali niti divergira u minus beskonačno niti u plus beskonačno.

2.3 Monotoni nizovi

Definicija 2.5. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je monoton, ako zadovoljava jedan od sledeća četiri uslova:

1. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je rastući ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n < a_{n+1}$;
2. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je neopadajući ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq a_{n+1}$;
3. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je nerastući ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq a_{n+1}$ opadajući ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > a_{n+1}$.

Na značaj monotonih nizova ukazuje sledeća teorema.

Teorema 2.8. Neopadajući niz ograničen odozgo je konvergentan. Nerastući niz ograničen odozdo je konvergentan.

Dokaz. Neka je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neopadajući, tj. $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq a_{n+1}$ i neka je ograničen odozgo, tj. postoji konstanta $M > 0$ takva da važi $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq M$. Prema tome, skup vrednosti X datog niza $X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je takođe ograničen odozgo, pa prema teoremi o supremumu (videti prvu glavu) postoji najmanje gornje ograničenje $s = \sup X$. Pokazaćemo da je broj s granica niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Broj s je gornje ograničenje skupa X , pa važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq s. \quad (2.2)$$

Budući da je broj s najmanje gornje ograničenje skupa X , to za svako $\epsilon > 0$ postoji član a_{n_0} datog niza takav da je

$$s - \epsilon < a_{n_0}. \quad (2.3)$$

Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je neopadajući, pa iz relacija (2.3) i (2.2) sledi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \Rightarrow s - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s < s + \epsilon.$$

To znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da važi $n > n_0 \Rightarrow |s - a_n| < \epsilon$, odakle sledi konvergencija niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Slično se pokazuje da odozdo ograničen nerastući niz ima infimum, koji je granica tog niza. \square

2.4 Niz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Pokazaćemo da je niz dat opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rastući i ograničen odozgo. Na osnovu teoreme 2.8 slediće da ovaj niz konvergira. Njegova granica je iracionalan broj $e = 2,71828\dots$, tj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Prvo ćemo pokazati da je količnik $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ manji od jedinice, što će značiti da dati niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ raste. Pre svega je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Na osnovu Bernulijeve nejednakosti (1.1), važi

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2},$$

pa je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{1 - \frac{n}{(n+1)^2}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 2} < 1. \quad (2.4)$$

Drugo, pokazaćemo da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen sa gornje strane. Na osnovu binomne formule (1.3) je

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(n-1))}{n!n^n}.$$

Sabirke na desnoj strani ćemo majorirati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2n^2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2}, \\ \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot n^3} &= \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{n(n-1) \cdots (n-(n-1))}{n! \cdot n^n} &= \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Dakle, niz sa opštim članom niz $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastući (relacija (2.4) i, prema (2.5), ograničen odozgo sa brojem 3, pa je na osnovu teoreme (2.8) konvergentan. Ako obeležimo sa e granicu niza sa opštim članom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dobijamo relaciju (2.4).

Preciznije, za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e. \quad (2.5)$$

Broj e , definisan sa (2.4), je iracionalan broj $e = 2,71828\dots$; taj broj je i osnova prirodnih logaritama, u oznaci \ln .

Primer 2.7. Znajući da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, i da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ povlači $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ($a \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$)) (videti 3. glavu, neprekidnost funkcija) odredićemo

sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2}; \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^{3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^{3n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3} \cdot \frac{9}{2}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n}{3}}\right)^{\frac{2n}{3}}\right)^{9/2} = e^{9/2}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(1 - \frac{1}{n})}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(-n)(-1)}} = e^2, \text{ ili}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{2(n-1)}{2}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 = e^2. \end{aligned}$$

Primer 2.8. Posmatrajmo niz dat sa $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Dokazaćemo da je $a_n > a_{n+1} > 0$, i odrediti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

b) Dokazaćemo nejednakost:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Dokazaćemo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) &= \ln 2; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{kn}\right) &= \ln k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

a) Korišćenjem Bernulijeve nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(1+1/n)^{n+1}}{(1+1/(n+1))^{n+2}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\ &> \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} \\ &> 1.\end{aligned}$$

Znači, $a_n > a_{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je opadajući. Kako je ograničen sa donje strane (na primer, nulom), to na osnovu teoreme 2.8 sledi da dati niz konvergira. Njegova granica je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

b) Iz a) i iz dokazane nejednakosti $(1 + 1/n)^n < e$ (videti (2.5)), sledi

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Kako je logaritamska funkcija rastuća, to važi

$$n \ln(1 + 1/n) < 1 < (n+1) \ln(1 + 1/n),$$

odakle je

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Prema tome je

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

c) Dokazaćemo samo prvu jednakost. Druga se pokazuje analogno.

Pomoću nejednakosti pokazane pod b), dobijamo za $n > 1$:

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &< \frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) &< \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) &< \frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right).\end{aligned}$$

Sabirajući gornje nejednakosti dobijamo

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{k-1} \right).$$

Pomoću transformacija

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \prod_{k=n}^{2n} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdots \frac{2n+1}{2n} \right),$$

dobijamo

$$\ln \left(\frac{2n+1}{n} \right) < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < \ln \left(\frac{2n}{n-1} \right).$$

Logaritamska funkcija ima osobinu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ povlači } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a \quad (a > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N})$$

(3. glava, neprekidnost), pa je

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n+1}{n} \right) &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \ln 2, \text{ i} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n}{n-1} \right) &= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n-1} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

Sada na osnovu teoreme 2.4 konačno dobijamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$.

2.5 Neki važni konvergentni nizovi

Primer 2.9. Pokazaćemo da je:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1, k > 0; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1.$$

a) Za $m \in \mathbb{N}$ i $m \geq k$, važi

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}} \right)^m = \left(\frac{n}{b^n} \right)^m,$$

gde je $b = \sqrt[m]{a} > 1$. Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{n}{b^n} &= \frac{n}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1+n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \dots + (b-1)^n} \\ &< \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}. \end{aligned}$$

Znači, važi

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \left(\frac{n}{b^n}\right)^m < \left(\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\right)^m.$$

Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} = 0$, to iz teoreme 2.4 sledi granična vrednost pod a).

b) Neka je $a > 0$ dato. Uvedimo broj $b > 1$ tako da je $b = a^{1/n}$. Na osnovu a) je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{b^n} = 0$, te postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da za $n > n_0$ važi $\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$. Tada je za svako $n > n_0$

$$\frac{1}{a^n} < \frac{n}{a^n} < 1, \quad \text{odnosno} \quad 1 < n < a^n.$$

Posle logaritmovanja dobijamo za $n > n_0$:

$$0 < \log_a n < n, \quad \text{odnosno} \quad 0 < \frac{\log_a n}{n} < \frac{1}{n}.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1.$$

Napomena. Ostavljamo čitaocu da dokaže opštiju graničnu vrednost od prethodne:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^s} = 0, \quad a > 1, s > 0. \quad (2.6)$$

Iz poslednje granične vrednosti sledi da za dato $s > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom

$$(n > n_0) \Rightarrow (|\log_a n| < n^s). \quad (2.7)$$

Primer 2.10. Ako je a realan parametar, pokazaćemo da je:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n!} = 0.$$

a) Ako je $|a| \leq 1$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

Ako je $|a| > 1$, tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{|a|}{k} \geq 1$ i $\frac{|a|}{k+1} < 1$. Tada je za $n > k$:

$$0 \leq \frac{|a|^n}{n!} < \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \frac{|a|}{3} \cdots \frac{|a|}{k} \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} = M \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k},$$

gde je M konstanta koja ne zavisi od n .

Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} = 0$, to iz teoreme 2.4 sledi da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ postoji i jednak je nuli.

b) Pretpostavimo da je $a > 0$ (ostali slučajevi su trivijalni) i neka prirodni brojevi k i n zadovoljavaju nejednakosti $k > a$ i $n > 2k$. Tada je $n-k+1 > n/2, \dots, n > n/2$. Iz procene

$$\frac{n^a}{n!} < \frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{(n-k)!(n-k+1)(n-k+2)\cdots n} < \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{n^k}{(n/2)^k} = \frac{2^k}{(n-k)!},$$

sledi da za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\epsilon)$ takav da za $n > n_0$ važi:

$$\left| \frac{n^a}{n!} \right| < \frac{2^k}{(n-k)!} < \frac{2^k}{n-k} < \epsilon. \quad (\text{Na primer, } n_0 = k+1 + \lceil 2^k / \epsilon \rceil).$$

Primer 2.11. Pokazaćemo da je:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^n} = 0; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{1+x_n} = 1, \quad \text{ako je } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad r \in \mathbb{R}.$$

a) Prisetimo prvo da važi

$$(n \geq 3a) \Rightarrow \left(0 < \left(\frac{a}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0, \quad \text{to je i } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n = 0.$$

b) Pretpostavimo da je $r > 0$. Slučaj $r < 0$ je sličan.

Ako je $x_n \geq 0$, tada je

$$1 \leq \sqrt[r]{1+x_n} \leq \left(\sqrt[r]{1+x_n}\right)^r = 1+x_n = 1+|x_n|.$$

Ako je $x_n \leq 0$, tada je

$$1 \geq \sqrt[r]{1+x_n} \geq \left(\sqrt[r]{1+x_n}\right)^r = 1+x_n = 1-|x_n|.$$

Oдавde je

$$1-|x_n| \leq \sqrt[r]{1+x_n} \leq 1+|x_n|.$$

Iz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, sledi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+|x_n|) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-|x_n|) = 1$, pa je i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[r]{1+|x_n|} = 1.$$

U sledećim primerima se pojavljuju specijalni nizovi kao sume drugih nizova. Tako za dati niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formiramo niz $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Primer 2.12. Pokazaćemo da niz

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

konvergira i odredićemo njegovu graničnu vrednost. Imamo

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Oдавde sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Napomena. U opštem slučaju, kada za dati niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formiramo niz $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tako da je $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, reći ćemo da je $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz parcijalnih suma*. Ako ovaj niz konvergira, onda ćemo njegovu graničnu vrednost zvati (konvergentan) *red* i označićemo je sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (o redovima će biti više reči u Analizi II). Primitimo samo da za konvergentan red opšti član a_n reda konvergira nuli, jer je $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$), uzimajući $S_0 = 0$.

Primer 2.13. Ispitaćemo konvergenciju niza

$$S_n = b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^{n-1}, \quad b \neq 0.$$

Ako je $q = 1$, tada niz parcijalnih suma ima oblik

$$S_n = b + b + \dots + b = nb$$

i divergira.

Ako je $q \neq 1$, tada imamo

$$\begin{aligned} S_n &= b + bq + bq^2 + bq^3 + \dots + bq^{n-1} \\ qS_n &= bq + bq^2 + bq^3 + bq^4 + \dots + bq^n. \end{aligned}$$

Oduzimanjem ove dve jednakosti dobijamo $(1 - q)S_n = b - bq^n$, odakle je

$$S_n = b \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (2.8)$$

Prema tome je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = b \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n}{1 - q}.$$

Neka je $|q| < 1$. Tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}.$$

Neka je $|q| > 1$. Tada za $q > 1$ važi $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, a za $q < -1$, niz q^n divergira.

Prema tome, opšti član ne teži nuli, te niz parcijalnih suma $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergira.

Znači niz $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira samo za $|q| < 1$.

Primer 2.14. Odredićemo sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3};$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}.$$

a) Kako je $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (zbir prvih n članova aritmetičke progresije, ili videti zadatak (1.1) a)), to je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Kako je $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (zadatak (1.1) b)), to je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

c) Zbir prvih n članova geometrijske progresije je (videti (2.8) za $b = 1$):

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad q \neq 1.$$

Oдавde sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2}}{\frac{1 - (1/3)^n}{1 - 1/3}} = 4/3.$$

2.6 Košijevi nizovi

Definicija 2.6. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev, ako zadovoljava uslov

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon \right). \quad (2.9)$$

Važi ekvivalentna definicija:

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall p \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}) \left(n > n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon \right).$$

Teorema 2.9. Potreban i dovoljan uslov da niz realnih brojeva konvergira jeste da je Košijev.

Dokaz. Dokažimo prvo da ako je niz konvergentan da je tada i Košijev. Neka niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Po definiciji konvergencije niza za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki prirodan broj $n > n_0$ važi $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Uzimajući prirodne brojeve m i n tako da je $m > n_0$ i $n > n_0$ imamo

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

tj. po definiciji 2.6 niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev.

Dokažimo sada da ako je niz Košijev da je tada i konvergentan. Neka je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev. Pokazaćemo prvo da je on i ograničen. Na osnovu definicije 2.6 za dato $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve prirodne brojeve $m, n > n_0$ važi $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{3}$. Za $m = n_0 + 1$ za svako $i > n_0$ važi

$$a_{n_0+1} - \frac{\epsilon}{3} < a_i < a_{n_0+1} + \frac{\epsilon}{3}. \quad (2.10)$$

Kako ima samo konačno članova niza (a_n) za koje eventualno ne važi relacija (2.10) to zaključujemo da je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen.

Kako je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje $\inf_{i \geq n} a_n = I_n$ i $\sup_{i \geq n} a_n = S_n$.

Na osnovu ovih definicija imamo

$$I_n \leq I_{n+1} \leq S_{n+1} \leq S_n.$$

To znači da smo dobili niz zatvorenih intervala $[I_n, S_n]$, $n \in \mathbb{N}$, sa osobinom da je svaki sledeći sadržan u prethodnom. Na osnovu Koši-Kantorovog principa postoji $L \in \mathbb{R}$ koje leži u svim intervalima $[I_n, S_n]$, tj. za sve $n \in \mathbb{N}$ važi $I_n \leq L \leq S_n$. Odavde, kako za $i \geq n$ važi

$$I_n = \inf_{i \geq n} a_n \leq a_i \leq \sup_{i \geq n} a_n = S_n,$$

dobijamo za $i \geq n$

$$|a_i - L| \leq S_n - I_n. \quad (2.11)$$

Sa druge strane, na osnovu (2.10) imamo za svako $n > n_0$

$$a_{n_0+1} - \frac{\epsilon}{3} \leq \inf_{i \geq n} a_n = I_n \leq S_n = \sup_{i \geq n} a_n \leq a_{n_0+1} + \frac{\epsilon}{3},$$

što daje za svako $n > n_0$

$$S_n - I_n \leq \frac{2}{3} \epsilon. \quad (2.12)$$

Sada na osnovu (2.11) i (2.12) dobijamo da za svako $i > n_0$ važi

$$|a_i - L| < \epsilon,$$

tj. niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka broju L . □

Primer 2.15. Pokazaćemo da je niz

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Košijev. Na osnovu definicije 2.6, pokazaćemo da za svako $\epsilon \in (0, 1)$ možemo odrediti $n_0 = n_0(\epsilon)$, takvo da za svako $n > n_0$ i za svako $p \in \mathbb{N}$, važi $|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$. Imamo,

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} \right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}} \right| = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1-3^{-p}}{1-1/3} < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{2/3} \\ &< \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Ako stavimo $n_0 = \lceil -\ln \epsilon / \ln 3 \rceil + 1$, onda za $n > n_0$ važi nejednakost

$$|a_{n+p} - a_n| < 3^{-n} < \epsilon.$$

Dakle, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je Košijev, pa je prema teoremi 2.9 i konvergentan niz.

Da bi se dokazala divergencija nekog niza nekada je lakše pokazati da on nije Košijev niz.

Primer 2.16. Pokazaćemo da niz $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat sa

$$e_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (\text{harmonijski niz})$$

nije Košijev, pa prema tome nije ni konvergentan. To znači da treba da pokažemo da postoji $\epsilon > 0$ takvo da za svako n_0 postoje $n > n_0$ i $p \in \mathbb{N}$ takvi da je $|e_{n+p} - e_n| \geq \epsilon$.

Uzmimo $\epsilon = 1/4$. Iz

$$|e_{n+p} - e_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

sledi da za $p = n$ imamo

$$|e_{n+p} - e_n| = |e_{2n} - e_n| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, harmonijski niz, sa opštim članom $e_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, nije Košijev, pa zato na osnovu teoreme 2.9 divergira.

2.7 Podnizovi i tačke nagomilavanja niza

Primer 2.17. Definicija. Neka je $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strogo rastući niz prirodnih brojeva, tj. neka za brojeve $p(k) = p_k$, $k \in \mathbb{N}$, važi $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$. Ako je $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ niz realnih brojeva, tada je niz $a \circ p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ **podniz** niza $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tj. $a \circ p = (a_{p_k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Podniz niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se može posmatrati i kao restrikcija funkcije $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, datom sa $a(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, na beskonačan strogo rastući podskup $\{p_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ skupa \mathbb{N} .

Podniz konvergentnog niza konvergira ka istoj granici kao i sam niz. Sa druge strane, podniz divergentnog niza može imati granicu, što je u vezi sa sledećim važnim pojmom.

Definicija 2.7. Realan broj ℓ je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ako za svako > 0 i svako $m \in \mathbb{N}$ postoji bar jedno $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, takvo da je $|a_n - \ell| < \epsilon$.

Ekvivalentan iskaz za definiciju 2.7 jeste da je realan broj ℓ tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako i samo ako za svako > 0 postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n sa osobinom $a_n \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$. Odavde odmah sledi da niz koji ima bar dve tačke nagomilavanja ne može biti konvergentan. Sa druge strane, granica konvergentnog niza je i njegova (jedina) tačka nagomilavanja.

Karakterizaciju tačke nagomilavanja niza daje sledeća teorema, koja direktno sledi iz definicije 2.7.

Teorema 2.10. Broj ℓ je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ako i samo ako važi bar jedan od sledeća dva uslova:

1. za proizvoljno > 0 postoji beskonačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \neq \ell$ i $a_n \in (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$;
2. postoji beskonačno mnogo brojeva $n \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n = \ell$.

Primer 2.18.

a) Niz dat sa $a_n = (n+1)/n$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja, 1, i ima granicu jednaku 1 (uslov 1. teoreme 2.10).

b) Niz dat sa $b_n = 1 + (-1)^n$ ima dve tačke nagomilavanja, i to 0 i 2. Primetimo da za beskonačno mnogo brojeva n važi $b_n = 0$ (u stvari, za sve neparne brojeve n), a takođe za beskonačno mnogo brojeva n važi $b_n = 2$. Dakle, u ovom slučaju i za $\ell_1 = 0$ i za $\ell_2 = 2$ važi uslov 2. teoreme 2.10, ali ne i uslov 1.

Ovaj niz je ograničen, ali nije konvergentan.

c) Niz dat sa $c_n = \begin{cases} 7, & n \text{ je paran broj,} \\ 7 + 1/n, & n \text{ je neparan broj,} \end{cases}$ ima jednu tačku nagomilavanja, 7, konvergentan je i granica mu je 7. Primitimo da je broj 7 tačka nagomilavanja ovog niza po *oba* uslova iz teoreme 2.10.

d) Niz dat sa $d_n = n(1 + (-1)^n)$ ima jednu tačku nagomilavanja, 0. Ustvari, za sve neparne brojeve $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je $d_{2k+1} = 0$, pa za proizvoljno $\epsilon > 0$ i za sve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ važi $d_{2k+1} \in (0 - \epsilon, 0 + \epsilon)$. Za tačku 0 važi uslov uslov 2) teoreme 2.10, ali ne i uslov 1).

Dodajmo da ovaj niz nije ograničen, pa iz teoreme 2.2 sledi da ne može biti ni konvergentan.

Odnos konvergencije, sa jedne, i tačke (tačaka) nagomilavanja jednog niza daje sledeća teorema, koja sledi iz prethodnih razmatranja.

Teorema 2.11. *Potreban i dovoljan uslov da niz konvergira jeste da je ograničen i da ima tačno jednu tačku nagomilavanja.*

Podsetimo se sledećih definicija. Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *ograničen odozgo* (respektivno: *ograničen odozdo*) ako postoji realan broj M sa osobinom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq M \quad (\text{respektivno: } (\forall n \in \mathbb{N})) \ a_n \geq M).$$

Niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je *ograničen odozdo* ako postoji realan broj M sa osobinom

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \geq M.$$

Očevidno je niz *ograničen* (videti definiciju 2.2) ako i samo ako je ograničen i odozgo i odozdo.

Definicija 2.8.

1. *Najveća tačka nagomilavanja odozgo ograničenog niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naziva se limes superior i označava se sa $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.*
2. *Najmanja tačka nagomilavanja odozdo ograničenog niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ naziva se limes inferior i označava se sa $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.*

Na osnovu aksiome (R16) iz prve glave može se pokazati da ako je niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ odozgo ograničen, tada postoji $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, a ako je odozdo ograničen, tada postoji $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

U primeru 2.18 b) tačka 2 je limes superior, dok je tačka 0 limes inferior niza sa opštim članom $b_n = 1 + (-1)^n$.

Iz teoreme 2.11 sledi da ako niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka broju L , tada je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Ako niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ima sledeću osobinu: $(\forall M > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) a_n > M$, tada ćemo pisati $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Analogno, ako za niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ važi $(\forall M > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) a_n < -M$, tada ćemo pisati $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Važe sledeće relacije:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{i \geq n} a_i \quad \text{i} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i \geq n} a_i.$$

Primer 2.19. Odredićemo tačke nagomilavanja niza $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ako je za $n \in \mathbb{N}$:

a) $f_n = (-1)^n$; b) $f_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{2n}{3}$; c) $f_n = n^2 + (-1)^n n^2$.

a) Niz ima dve tačke nagomilavanja $\ell_1 = 1$ i $\ell_2 = -1$, jer je $f_{2k} = 1$ i $f_{2k-1} = -1$ za $k = 1, 2, \dots$. Očividno je da je $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = -1$ i $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = 1$.

b) Niz ima tri tačke nagomilavanja: 0 , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, jer je

$$\begin{aligned} f_{3k} &= \frac{3k}{3k+1} \sin(2k/3) = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f_{3k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k+1}{3k+2} \sin(2k/3 + 2/3) = \sqrt{3}/2, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f_{3k+2} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k+2}{3k+3} \sin(2k/3 + 4/3) = -\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Prema tome je $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Niz $f_n = n^2 + (-1)^n n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja jer je $f_{2k+1} = 0$, za $k \in \mathbb{N}$; međutim, zbog $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k} = +\infty$, dati niz ne konvergira. Dakle,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = 0 \quad \text{i} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = +\infty.$$

Primer 2.20. Odredićemo sve tačke nagomilavanja niza $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, čiji su članovi svi racionalni brojevi iz intervala $[0, 1]$, tj.

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 1/2, \quad r_4 = 1/3, \quad r_5 = 2/3, \quad r_6 = 1/4, \quad r_7 = 3/4, \\ r_8 = 1/5, \quad r_9 = 2/5, \quad r_{10} = 3/5, \quad r_{11} = 4/5, \quad r_{12} = 1/6, \dots$$

Svaki realan broj iz intervala $[0, 1]$ je tačka nagomilavanja datog niza, jer u proizvoljnoj δ -okolini svakog realnog broja $a \in [0, 1]$ (tj. u intervalu $(a - \delta, a + \delta)$) ima beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Ako tačka $a \notin [0, 1]$, tada uvek postoji okolina tačke a takva da ne sadrži ni jedan element datog niza. Jasno je da je

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \quad \text{i} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = 1.$$

Glava 3

Granična vrednost i neprekidnost funkcije

3.1 Granična vrednost funkcije

3.1.1 Definicija granične vrednosti funkcije

Pojam granične vrednosti uvodimo u cilju ispitivanja "ponašanja" funkcije u okolini neke tačke x_0 (bez obzira na vrednost funkcije u x_0 , i koja čak i ne mora biti definisana u toj tački!). To znači da nas interesuje ponašanje funkcije kada je x "blisko" x_0 ("malo se razlikuje" od x_0). Da je neka tačka x "blizu" tačke x_0 možemo opisati tako što će njeno rastojanje od x_0 biti manje od dovoljno malog broja $\delta > 0$. Broj δ je onda merilo "blizine" tačaka x i x_0 . Ovo znači da je $|x - x_0| < \delta$, tj. po definiciji apsolutne vrednosti $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, odnosno $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Sada nas dalje interesuje da li su vrednosti funkcije $f(x)$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ "blizu" nekog broja G , tj. rastojanje tačke $f(x)$ od G manje od nekog broja $\epsilon > 0$. Broj ϵ je onda merilo "blizine" tačaka $f(x)$ i G . Ovo znači da je $|f(x) - G| < \epsilon$, tj. po definiciji apsolutne vrednosti $G - \epsilon < f(x) < G + \epsilon$, odnosno $f(x) \in (G - \epsilon, G + \epsilon)$.

Da bismo dali preciznu definiciju granične vrednosti funkcije u tački, moramo imati definiciju tačaka koje imaju osobinu da u njihovoj "blizini" uvek ima tačaka iz definicionog skupa funkcije.

Podsetimo se definicije 1.16:

Neka skup $A \subset \mathbb{R}$ ima beskonačno mnogo članova. Tačka x_0 je *tačka nagomilavanja skupa* $A \subset \mathbb{R}$, ako u svakom otvorenom intervalu koji sadrži tačku x_0 (okolini x_0) postoji bar jedan elemenat iz skupa A , različit od x_0 .

Svaka tačka zatvorenog intervala $[a, b]$ je i njegova tačka nagomilavanja, međutim tačke nagomilavanja otvorenog intervala (a, b) su sve njegove tačke, ali i tačke

a i b koje mu ne pripadaju.

Pođimo od jednog primera.

Primer 3.1. Funkcija $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, je definisana na skupu $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Interesuje nas "ponašanje" funkcije f u okolini tačke 2, iako u njoj funkcija nije definisana. Tačka $x_0 = 2$ je tačka nagomilavanja definicionog skupa funkcije f , pa za proizvoljno $\epsilon > 0$ u skupu $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$ ima beskonačno mnogo elemenata iz definicionog skupa. Za $x \neq 2$ škraćivanjem brojioca i imenioca sa $x-2$ dobijamo funkciju $g(x) = \frac{1}{x+2}$, $x \neq -2$, a koja je definisana za $x_0 = 2$ i važi $g(2) = \frac{1}{4}$. Funkcije f i g se poklapaju u "blizini" tačke $x_0 = 2$, tj.

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} = g(x), \quad x \neq -2, \quad x \neq 2,$$

pa zaključujemo i da se vrednosti funkcije f takođe nalaze u okolini tačke $1/4$ kada je x u okolini tačke x_0 ($x \neq -2$). Iako funkcija f nije definisana u tački $x_0 = 2$, mogli bismo reći, da kada se broj x "približava" broju $x_0 = 2$ (kaže se "kada x teži 2"), da se tada $f(x)$ približava $1/4$ (kaže se " $f(x)$ teži graničnoj vrednosti $1/4$ "). Ovo zapisujemo $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1/4$.

Sada možemo dati opštu definiciju granične vrednosti funkcije u tački.

Slika 3.1.

Definicija 3.1. Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena A funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Broj G je granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za svaki broj $\epsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, tako da za svaku tačku iz skupa A za koju je $0 < |x - x_0| < \delta$ važi $|f(x) - G| < \epsilon$.

Tada pišemo

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G$$

i čitamo "limes od $f(x)$ kada x teži x_0 po skupu A je G ". Primitimo da $\delta > 0$ zavisi od $\epsilon > 0$, tj. $\delta = \delta(\epsilon)$.

Primer 3.2. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu izrazom $f(x) = x^3 - 8$.

Kako je svaka tačka skupa \mathbb{R} i tačka nagomilavanja skupa \mathbb{R} , to možemo potražiti graničnu vrednost date funkcije u proizvoljnoj tački skupa \mathbb{R} (naravno, to još ne znači da ona i postoji!).

Uzmimo na primer $x_0 = 2$. Neka je specijalno $\epsilon = \frac{1}{100}$. Kako važi

$$|f(x) - 0| = |x^3 - 8 - 0| = |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| = |x-2||x^2 + 2x + 4|,$$

to za $x \in [1, 3]$ sledi

$$|f(x) - 0| \leq 19|x-2| \quad (3.1)$$

jer je

$$|x^2 + 2x + 4| \leq 19, \text{ za } x \in [1, 3].$$

Uzimajući $\delta = \frac{1}{1900}$ iz (3.1), sledi da ako je $0 < |x-2| < \frac{1}{1900}$, onda je

$$|f(x) - 0| < \frac{1}{100}.$$

Da bismo pokazali da je stvarno granična vrednost funkcije f jednaka nuli 0, kada x teži ka 2, potrebno je pokazati da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tako da iz nejednakosti $0 < |x-2| < \delta$ sledi $|f(x) - 0| < \epsilon$. Kako za $x \in [1, 3]$ važi uvek (3.1), za proizvoljno $\epsilon > 0$, broj δ uzimamo da je manji ili jednak $\frac{\epsilon}{19}$ i manji ili jednak 1, jer interval $(2 - \delta, 2 + \delta)$ mora pripadati intervalu $[1, 3]$. Za ovako izabrano δ , tj. $\delta \leq \min\left\{\frac{\epsilon}{19}, 1\right\}$, na osnovu (3.1) važi da $0 < |x-2| < \delta$ povlači

$$|f(x) - 0| \leq 19|x-2| < 19 \cdot \frac{\epsilon}{19} = \epsilon.$$

Tako smo dobili da je $\lim_{x \rightarrow 2, x \in \mathbb{R}} (x^3 - 8) = 0$.

Primer 3.3. Posmatrajmo sada funkciju

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 8, & x \neq 2 \\ 55, & x = 2. \end{cases}$$

Funkcije f i g su jednake za $x \neq 2$, a funkcija g je definisana u tački 2. Pokazaćemo da je i $\lim_{x \rightarrow 2, x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Kao i u prethodnom primeru, za $x \in [1, 3] \setminus \{2\}$ imamo

$$|g(x) - 0| \leq 19|x-2|. \quad (3.2)$$

Za proizvoljno $\epsilon > 0$ uzimamo δ tako da je manje ili jednako $\frac{\epsilon}{19}$ i manje ili jednako 1. Za ovako izabrano δ , na osnovu (3.2) važi da $0 < |x-2| < \delta$ povlači

$$|g(x) - 0| \leq 19|x-2| < 19 \cdot \frac{\epsilon}{19} = \epsilon.$$

Zato je $\lim_{x \rightarrow 2, x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Primer 3.3 pokazuje da vrednost funkcije u tački x_0 , u kojoj tražimo graničnu vrednost ne utiče na samu graničnu vrednost ($g(2)$ može biti i bilo koji drugi realan broj, a ne samo 55).

Primitimo da tačka x_0 može, ali ne mora, pripadati definicionom skupu A funkcije f , ali mora biti tačka nagomilavanja skupa A , odnosno u svakom intervalu koji sadrži tačku x_0 mora postojati beskonačno mnogo elemenata definicionog skupa funkcije f . Obratimo pažnju i na činjenicu da iz nejednakosti $0 < |x - x_0|$ sledi da su tačke x koje se "približavaju" tački x_0 uvek različite od same tačke x_0 u kojoj se traži granična vrednost.

Sledeći primer pokazuje da funkcija čiju graničnu vrednost tražimo u nekoj tački i ne mora biti definisana u toj tački.

Primer 3.4. Neka je data funkcija $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Pokazaćemo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}} f(x) = 0.$$

Za dato $\epsilon > 0$ uzimamo $\delta = \epsilon$. Tada $0 < |x| < \delta$ povlači

$$\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| \leq |x| < \delta.$$

Vratimo se sada na definiciju 3.1 i dajmo neka dodatna objašnjenja. Prvo, korišćenjem logičkih simbola može se definicija 3.1 zapisati u sledećem obliku

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G \iff$$

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in A) (0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - G| < \epsilon).$$

Naglasimo da za dato $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, tj. zavisi od ϵ , $\delta = \delta(\epsilon)$. Isto tako primitimo da sa desne strane prvo pretpostavljamo, iako nije zapisano, da postoji G , tj. $(\exists G)$.

Sada ćemo dati i geometrijsku interpretaciju definicije 3.1. Uslov $x \in A$ i $0 < |x - x_0| < \delta$ možemo prema definiciji apsolutne vrednosti zapisati kao

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}.$$

Uslov $|f(x) - G| < \epsilon$ možemo opet prema definiciji apsolutne vrednosti zapisati kao

$$G - \epsilon < f(x) < G + \epsilon, \text{ tj. } f(x) \in (G - \epsilon, G + \epsilon).$$

Sada definiciju 3.1 možemo ovako interpretirati: G je granična vrednost funkcije f kada x teži broju x_0 , ako za svaku okolinu (simetrični otvoren interval) oko tačke G , $(G - \epsilon, G + \epsilon)$ postoji okolina (simetrični otvoren interval) oko

tačke x_0 , $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tako da se sve tačke x iz definicionog skupa A koje se nalaze u intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, preslikaju funkcijom f u interval $(G - \epsilon, G + \epsilon)$.

Ovo bismo mogli zapisati i na sledeći način

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G \iff \text{za svako } (G - \epsilon, G + \epsilon) \text{ postoji } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{ tako da je}$$

$$f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}) \subset (G - \epsilon, G + \epsilon), \quad (3.3)$$

gde je $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\})$ skup slika elemenata $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ funkcijom f .

Primer 3.5. Pokazaćemo da funkcija

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

nema graničnu vrednost u tački $x = 0$, preko skupa realnih brojeva (sl. 3.2).

Slika 3.2.

Da bismo to pokazali treba dokazati (negacija od (3.1)) da važi

$$(\forall G \in \mathbb{R}) (\exists \delta > 0) (\forall \epsilon > 0) (\exists x \in A) (0 < |x| < \delta \Rightarrow |h(x) - G| \geq \epsilon).$$

Dakle, pokazaćemo da za bilo koji realan broj G koji bi mogao biti granična vrednost funkcije h kada x teži 0 postoji realan broj $\delta > 0$ takav da, ako uzmemo ma kako mali broj $\epsilon > 0$, uvek postoji tačka $x \in A$ takva da za $0 < |x| < \delta$ ne važi $|h(x) - G| < \epsilon$, nego važi $|h(x) - G| \geq \epsilon$.

Očigledno je da nijedan realan broj različit od 0 i 1 ne može biti granična vrednost funkcije h . Naime, oko bilo koje tačke $G \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ uvek možemo naći $\delta > 0$ okolinu $(G - \delta, G + \delta)$ (na y -osi) koja ne sadrži ni 0 ni 1, uzimajući

$$\delta \leq \min\{|1 - G|, |G - 0|\},$$

što znači da u toj okolini nema nijedne vrednosti funkcije $h(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Pokazaćemo sada da $G = 1$ ne može biti granična vrednost funkcije h kada x teži 0. Odaberimo δ -okolinu oko 1, $(1 - \delta, 1 + \delta)$ (na y osi) takvu da ne sadrži tačku 0, tj. uzimajući da je $\delta \leq 1$. Tada za ma koju simetričnu ϵ -okolinu oko nule $(-\epsilon, \epsilon)$ (na x osi) uvek postoji tačka $x \in (-\delta, \delta)$ (očigledno za $x < 0$) takva da je $h(x) = 0 \notin (1 - \delta, 1 + \delta)$, pa 1 ne može biti granična vrednost funkcije h kada x teži 0. Analogno se pokazuje da ni $G = 0$ ne može biti granična vrednost funkcije h kada x teži 0 (pokažite!).

Kako smo time iscrpili sve moguće slučajeve, zaključujemo da funkcija h nema graničnu vrednost u tački 0.

3.1.2 Leva i desna granična vrednost funkcije

Funkcija h iz primera 3.5 će nam poslužiti kao ilustracija koliko je važno preko kojeg skupa x teži ka x_0 .

Primer 3.6. Neka je $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ skup pozitivnih realnih brojeva. Pokazaćemo da važi

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_+} h(x) = 1,$$

gde je h funkcija iz primera 3.5.

Za proizvoljnu ε -okolinu $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ broja 1 ($\varepsilon > 0$) i za bilo koju δ -okolinu $(-\delta, \delta)$ za $\delta > 0$, skup $(-\delta, \delta) \cap \mathbb{R}_+ = (0, \delta)$ se funkcijom h preslikava na 1, tj. važi $h((0, \delta)) = \{1\} \subset (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, pa na osnovu (3.3) postoji granična vrednost funkcije h kada x teži nuli preko skupa \mathbb{R}_+ (x teži nuli sa desne strane) i to je 1.

Analogno se može pokazati da je

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_-} h(x) = 0,$$

gde je \mathbb{R}_- skup svih negativnih realnih brojeva.

Prethodni primer ilustruje sledeće definicije.

Definicija 3.2. Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena A funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Broj G je desna granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija

$$(\forall x \in A) \wedge (0 < x - x_0 < \delta) \Rightarrow |f(x) - G| < \varepsilon.$$

Ako ona postoji, označava se sa

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A_+} f(x).$$

Definicija 3.3. Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena A funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Broj G je leva granična vrednost funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija

$$(\forall x \in A) \wedge (0 < x_0 - x < \delta) \Rightarrow |f(x) - G| < \varepsilon.$$

Ako ona postoji, označava se sa

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A_-} f(x).$$

Na osnovu primera 3.6 sledi da funkcija h ima levu i desnu graničnu vrednost, te da je

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_+} h(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}_-} h(x) = 0.$$

Kao što smo videli u primeru 3.6 za istu funkciju h nije postojala granična vrednost u tački 0. Na osnovu prethodnog postoji leva i desna granična vrednost, ali su one različite.

Primer 3.7. Odredićemo levu graničnu vrednost: $\lim_{x \rightarrow 0-0} (2 + \sqrt{-x})$.

Funkcija $f(x) = 2 + \sqrt{-x}$ je definisana za $x < 0$, pa važi $\lim_{x \rightarrow 0-0} (2 + \sqrt{-x}) = 2$.

Upravo činjenica da su leva i desna granična vrednost različite jeste razlog što ne postoji granična vrednost funkcije h u tački 0 u primeru 3.6. Naime, važi sledeća teorema.

Teorema 3.1. *Potreban i dovoljan uslov da funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ima graničnu vrednost u tački nagomilavanja x_0 skupa A jeste da postoje leva i desna granična vrednost funkcije u tački x_0 i da su one jednake, tj.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A_-} f(x) \left(= \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) \right).$$

3.2 Uopštenje granične vrednosti funkcije

Uvedene granične vrednosti u tački $x_0 \in \mathbb{R}$, mogu se proširiti i na slučaj kada x_0 nije konačan broj, kao i na slučaj kada granica nije konačan broj.

Uvedene leve i desne granične vrednosti mogu se proširiti na slučaj kada *granična vrednost nije konačan broj*, što je korisno kod ispitivanja funkcija.

Primer 3.8. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), ispitajmo "ponašanje" u blizini nule sa desne strane. Ma koliko veliko $M > 0$ uzeli, uvek postoji broj $\delta > 0$ ($\leq \frac{1}{M}$) takav da za $x \in (0, \delta)$ povlači $f(x) = \frac{1}{x} > M$. Ovo bismo mogli zapisati

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Prethodni primer opravdava sledeću definiciju.

Definicija 3.4. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ teži ka $+$ kada x teži x_0 preko skupa A_+ (odnosno preko skupa A_-) ako za svaki broj $M > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (odnosno $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) i $x \in A$ povlači $f(x) > M$. Tada u prvom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow x_0+0, x \in A} f(x) = +\infty$, a u drugom $\lim_{x \rightarrow x_0-0, x \in A} f(x) = +\infty$ (sl. 3.3 a i c). Sasvim analogno se definiše i kada funkcija teži $-\infty$.

Definicija 3.5. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ teži ka $-\infty$ kada x teži x_0 preko skupa A_+ (odnosno preko skupa A_-) ako za svaki broj $M > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (odnosno $x \in (x_0 - \delta, x_0)$) i $x \in A$ povlači $f(x) < -M$. Tada u prvom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow x_0+0, x \in A} f(x) = -\infty$, a u drugom $\lim_{x \rightarrow x_0-0, x \in A} f(x) = -\infty$ (sl. 3.3 b i d)).

Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, iz primera 3.8 važi

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Drugo proširenje granične vrednosti odnosi se na ponašanje funkcije za velike vrednosti x , tj. u "tačkama" $+\infty$ i $-\infty$. Za okolinu (interval) oko "tačke" $+\infty$ uzimamo $(a, +\infty)$ a za "tačku" $-\infty$ interval $(-\infty, a)$. Tako dolazimo do uopštenja definicije 3.1 kada x teži $+\infty$ i $-\infty$.

Definicija 3.6. Funkcija $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (odnosno $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$) ima graničnu vrednost G kada x teži ka $+\infty$ (odnosno ka $-\infty$) ako za svaki broj $\epsilon > 0$ postoji $M > a$ (odnosno $M < a$) tako da $x > M$ (odnosno $M < a$) povlači $|f(x) - G| < \epsilon$. Tada u prvom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = G$ (sl. 3.4), a u drugom $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = G$.

Primer 3.9. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) važi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Važi sledeće uopštenje primera 3.9 za $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (\text{za one } r \text{ za koje funkcija } x^r \text{ ima smisla}).$$

3.3 Osobine granične vrednosti funkcije

Pokazaćemo sada tesnu vezu između granične vrednosti funkcije i granične vrednosti niza odakle ćemo, koristeći ranije dokazane osobine granične vrednosti nizova, lako dobiti osobine graničnih vrednosti funkcija. Važi sledeća teorema.

Teorema 3.2. Broj G je granična vrednost funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kad x teži x_0 (x_0 može biti $+$ ili $-$) ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $A \setminus \{x_0\}$ (u slučaju ako je $x_0 +$ ili $-$ onda iz skupa A) koji konvergira ka x_0 (teži $+$ ili $-$), niz $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka G , tj. važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G.$$

Dokaz. Prvo dokaz dajemo za konačno x_0 . Pokažimo prvo da iz postojanja

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G \quad \text{sledi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G,$$

za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz skupa $A \setminus \{x_0\}$ koji konvergira ka x_0 . Na osnovu definicije 3.1 za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ sledi

$$f(x) \in (G - \epsilon, G + \epsilon).$$

Kako niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $A \setminus \{x_0\}$ konvergira ka x_0 , to postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n > n_0$ važi $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$, pa sledi $f(x_n) \in (G - \epsilon, G + \epsilon)$, za $n > n_0$. Ovo povlači da je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G$.

Dokažimo sada obrnuto tvrđenje. Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz $A \setminus \{x_0\}$ za koji je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ važi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = G$ i dokažimo da je $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da nije $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G$ i pokažimo da nas takva pretpostavka dovodi do protivrečnosti.

Neka G nije granična vrednost funkcije f u tački x_0 , preko skupa A (negacija od definicije 3.1). Tada postoji okolina $(G - \epsilon, G + \epsilon)$ tačke G takva da se u svakoj $\frac{1}{n}$ okolini tačke x_0 , tj. u skupu $(x_0 - 1/n, x_0 + 1/n) \cap A \setminus \{x_0\}$ (za svako $n \in \mathbb{N}$) može naći tačka x_n , da $f(x_n) \notin (G - \epsilon, G + \epsilon)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zadnja relacija pokazuje da niz $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne konvergira ka G , iako niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ po načinu izbora konvergira ka x_0 . Dobijena protivrečnost pokazuje da polazna pretpostavka nije bila tačna, te je tačno suprotno, a to je traženo tvrđenje za konačno x_0 .

Kada x teži $+$ ili $-$ postupak dokaza je isti kao za konačan slučaj, samo umesto intervala $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uzimamo $(M, +)$ za $M > 0$ kada x teži $+$, odnosno $(-, -M)$ kada x teži $-$. \square

Primer 3.10. Koristeći teoremu 3.2, pokazaćemo da je $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+5}{6x+4} = \frac{1}{2}$.

Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ proizvoljan niz realnih brojeva koji ima sledeće dve osobine: svi članovi pripadaju domenu funkcije $f(x) = \frac{2x+5}{6x+4}$, tj. $x_n \neq -2/3$, $n \in \mathbb{N}$, i

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$. Nizu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ odgovara niz vrednosti funkcije f , tj. niz $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, a njegova granica je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n + 5}{6x_n + 4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n + 5)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (6x_n + 4)} = \frac{6 + 5}{18 + 4} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}.$$

Prema teoremi 3.2 sledi da je $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 5}{6x + 4} = \frac{1}{2}$.

Napomena. Teorema 3.2 se često primenjuje u slučaju kada želimo da pokažemo da neka funkcija nema granicu.

Primer 3.11. Pokazaćemo da funkcija $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nema granicu u tački $x_0 = 0$.

Posmatraćemo dva niza data sa $x_n = \frac{1}{n}$ i $y_n = \frac{2}{(4n+1)}$, $n = 1, 2, \dots$, koji teže ka istoj granici 0, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Međutim, iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \sin\left(\frac{4n+1}{2}\right) = 1,$$

sledi, prema definiciji 3.2, da ne postoji $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$.

Primitimo da ne postoje ni granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ odnosno $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$.

Koristeći osobine konvergentnih nizova na osnovu teoreme 3.2 sada možemo preneti važne osobine i na graničnu vrednost funkcije. Prva od tih osobina se odnosi i na jedinstvenost granične vrednosti.

Teorema 3.3. *Ako je*

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G_1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = G_2,$$

tada je $G_1 = G_2$, tj. ako granična vrednost postoji, onda je ona jedinstvena.

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.2 tvrđenje se svodi na dokaz jedinstvenosti granične vrednosti niza. \square

Koristeći odnos graničnih vrednosti nizova i algebarskih operacija zaključujemo da važi teorema.

Teorema 3.4. Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A . Ako pretpostavimo da postoje

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} g(x) = K,$$

tada postoje i sledeće granične vrednosti i važe sledeće jednakosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} (f(x) \pm g(x)) = L \pm K,$$

tj. granična vrednost zbira (respektivno razlike) dve funkcije jednaka je zbiru (respektivno razlici) graničnih vrednosti tih funkcija.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K,$$

tj. granična vrednost proizvoda dve funkcije jednaka je proizvodu graničnih vrednosti tih funkcija.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}, \quad g(x) \neq 0, x \neq x_0, K \neq 0,$$

tj. granična vrednost količnika dve funkcije jednaka je količniku graničnih vrednosti tih funkcija.

Primer 3.12. U primeru 3.2 je

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0.$$

Koristeći teoremu 3.4 lako dobijamo da je

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8)^2 = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Primer 3.13. Odredićemo $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + x^3 - 8 \right)$. Koristeći teoremu 3.4 dobijamo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} + x^3 - 8 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 8) = 0 - 8 = -8.$$

Primer 3.14. Odredićemo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^3 - 8}$. Koristeći teoremu 3.4 lako dobijamo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x^3 - 8} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 8)} = \frac{0}{8} = 0.$$

Teorema 3.5. Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A . Ako postoje granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} g(x) = K,$$

i za sve $x \in A \setminus \{x_0\}$ važi nejednakost $f(x) \leq g(x)$, tada je $L \leq K$.

Teorema 3.6. Neka su realne funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A . Ako postoje granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = L$ i $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} g(x) = K$, i važi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, za sve $x \in A \setminus \{x_0\}$, tada je

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} h(x) = L.$$

Ako je skup A prirodni definicioni skup funkcije f , ili se domen A podrazumeva, pišaćemo samo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, za graničnu vrednost, desnu i levu graničnu vrednost funkcije f u tački x_0 respektivno.

U nekim slučajevima, pre nego što primenimo teoremu 3.4, potrebno je izvršiti neke transformacije.

Primer 3.15. Odredićemo sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 5}{5x^3 + x^2 + x + 3}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{5x^3 + 3x^2 + 2x + 5}{5x^3 + x^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{x^3 \left(5 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^3 \left(5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = 1.$$

3.4 Neke važne granične vrednosti funkcija

Prvo ćemo izvesti neke nejednakosti na osnovu geometrijskih razmatranja. Posmatrajmo jediničnu kružnicu sa centrom u tački $O(0,0)$ i neka je dat ugao $0 < x < \frac{\pi}{2}$, čiji kraci seku kružnicu u tačkama $A(1,0)$ i $M(x,y)$. Tangenta kružnice u tački A neka seče krak OM u tački N , i neka je M' podnožje normale iz tačke M na x -osu (slika 3.5).

U tom slučaju važi očevidna nejednakost

$$P_{\triangle OAM} < P_{i(OAM)} < P_{\triangle OAN}, \quad (3.4)$$

gde, na primer, $P_{\triangle OAM}$ označava površinu trougla OAM , a $P_{i(OAM)}$ označava površinu kružnog isečka OAM . Visina trougla OAM koja odgovara stranici OA je $MM' = \sin x$, pa je $P_{\triangle OAM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$. Slično, pošto je kateta NA pravouglog

Slika 3.5.

trougla OAN jednaka $\operatorname{tg} x$, to je $P_{\triangle OAN} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Konačno, iz elementarne matematike je poznato da je površina kružnog isečka jednaka polovini proizvoda poluprečnika na kvadrat i zahvaćenog ugla (jasno, izraženog u radijanima):

$$P_{i(OAM)} = \frac{1}{2} (\overline{OA} \cdot \overline{OM} \cdot x) = \frac{x}{2}.$$

Relacija (3.4) se može zapisati na sledeći način: $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Odavde je

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (3.5)$$

Granične vrednosti $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

Dokazaćemo prvo da je $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Naime, iz prve nejednakosti u (3.5) sledi da je $\frac{\sin x}{x} < 1$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Pošto je funkcija $\frac{\sin x}{x}$ parna, to iz prethodne nejednakosti sledi da je

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{za} \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \quad (3.6)$$

Za proizvoljno $\epsilon > 0$ ($\epsilon \leq \frac{\pi}{2}$) uzimajući $\delta = \epsilon$, dobijamo na osnovu (3.6) da $0 < |x| < \delta$ povlači

$$|\sin x - 0| \leq |x| < \delta = \epsilon,$$

tj. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 = \sin 0$.

Za kosinusnu funkciju koristimo prethodni rezultat i trigonometrijski identitet $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$. Naime, imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \lim_{z \rightarrow 0} \sin z \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1 = \cos 0,$$

gde smo stavili $z = \frac{x}{2}$ (videti teoremu 3.7).

Sada lako dobijamo traženu jednakost za opšti slučaj koristeći adicijonu formulu za sinusnu funkciju:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x - x_0 + x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x - x_0) \cdot \cos x_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x - x_0) \cdot \sin x_0 \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \sin z \cdot \cos x_0 + \lim_{z \rightarrow 0} \cos z \cdot \sin x_0 \\ &= 0 \cdot \cos x_0 + 1 \cdot \sin x_0 = \sin x_0, \end{aligned}$$

gde smo stavili $z = x - x_0$.

Analogno dobijamo traženu jednakost za opšti slučaj $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ koristeći adicijonu formulu za kosinusnu funkciju.

Granična vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Na osnovu (3.5) dobijamo

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \text{ odnosno } 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (3.7)$$

jer smo pretpostavili da je $x \in (0, \pi/2)$, što povlači da su $\sin x > 0$ i $\operatorname{tg} x > 0$.

Kako je $\lim_{x \rightarrow 0+0} \cos x = \cos 0 = 1$ to iz teoreme 3.6 sledi da je

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$, je parna, pa važi da je i $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$, što konačno daje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Primer 3.16. Odredićemo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Na osnovu $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 0$ dobijamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Često se u praksi javljaju primeri u kojima je potrebno odrediti graničnu vrednost kompozicije funkcija, posebno kada se granična vrednost funkcije nalazi pomoću *smene*. Postavlja se pitanje da li je uvek moguće odrediti graničnu vrednost pomoću smene. Odgovor na to pitanje daje sledeća teorema.

Teorema 3.7. *Ako postoje granične vrednosti*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{i} \quad \lim_{y \rightarrow L} g(y) = K$$

i za $x \neq a$ u nekoj okolini $(a - \delta, a + \delta)$ važi da je $f(x) \neq L$, tada postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x)$, koja je jednaka

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = K. \quad (3.8)$$

Primer 3.17. Sledeća granična vrednost $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(7x-7)}{x-1}$ određuje se na sledeći način:

Funkcija $h(x) = \frac{\sin 7(x-1)}{x-1}$, $x \neq 1$, se može napisati kao složena funkcija $h = g \circ f$, gde je $f(x) = 7(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$ i $g(y) = \frac{\sin y}{y/7}$, $y \neq 0$. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (7(x-1)) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y/7} = 7 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 7 \cdot 1 = 7,$$

to su zadovoljeni uslovi teoreme 3.7, te sledi

$$\lim_{x \rightarrow 1} g \circ f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 7, \quad \text{pa je} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7(x-1)}{x-1} = 7.$$

Primer 3.18. Odredićemo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x}$.

Na osnovu identiteta $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, dobija se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Granična vrednost $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Kod nizova smo uveli broj e kao graničnu vrednost

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Važi sledeće uopštenje za nizove.

Teorema 3.8. Neka je $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva da je $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$ i neka je $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva da je $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\infty$. Tada važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Dokaz. Neka je $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz prirodnih brojeva takvih da je $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$. Niz sa opštim članom $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergira ka e , što znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0(\epsilon)$ takvo da za svako $n > n_0(\epsilon)$ važi

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \epsilon, \text{ odakle sledi } \left| \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e \right| < \epsilon, \text{ za } n_k > n_0(\epsilon),$$

što daje $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$.

Neka je, dalje, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva sa osobinom $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$. Tada postoji niz celih brojeva $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, takvih da je $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ i važi $n_k \leq p_k < n_k + 1$, tj. $n_k = [p_k]$. Odavde je

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{n_k} \text{ odnosno } 1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + \frac{1}{p_k} \leq 1 + \frac{1}{n_k}.$$

Prema tome je (p_k su pozitivni za dovoljno veliko k)

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{p_k} < \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)^{p_k} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{p_k},$$

odakle je

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}, \text{ tj.}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{-1} < \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

Odavde sledi $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)^{p_k} = e$.

Neka je dalje $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, niz realnih brojeva takav da je $-q_n > 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -\infty$.

Uvođenjem smene $q_n = -n$ dobijamo

$$\left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Odavde sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$. \square

Na osnovu teoreme 3.2 prelazeći na nizove te koristeći teoremu 3.8 zaključujemo da važe jednakosti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (3.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3.10)$$

Primer 3.19. Odredićemo sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

a) Odredićemo prvo levu graničnu vrednost date funkcije u nuli, tj.

$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{1/x}$. Ako stavimo $t = 1/x$, tj. $x = 1/t$, tada $t \rightarrow -\infty$ kada $x \rightarrow 0-0$.

Tako dobijamo

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{1/x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-s}\right)^{-s} = e.$$

Analogno se dobija da je i desna granična vrednost date funkcije u nuli jednaka e . Dakle, i tražena granična vrednost je jednaka e , tj.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

b) Imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})^x}{(1-\frac{1}{x})^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x = e^2. \end{aligned}$$

Eksponecijalna funkcija $y = a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

Pomoću pojma granične vrednosti možemo precizno definisati šta ćemo podrazumevati pod a^x za dati broj $a > 0$ i bilo koji realan broj x , tj. proširićemo pojam stepena za eksponente iz čitavog skupa realnih brojeva.

Neka je $a > 1$. Za $x = n \in \mathbb{N}$ je jasno značenje izraza a^n , jer je

$$a^1 = a \quad \text{i} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Dalje, za cele brojeve x imamo

$$a^0 = 1 \quad \text{i} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako za svaki realan broj $a > 0$ postoji jedinstveno realno rešenje $z > 0$ za jednačinu $z^n = a$, koje zovemo n -ti koren iz a i označavamo sa $z = a^{1/n}$, to uvodimo

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \quad \text{i} \quad a^{-\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

za $n \in \mathbb{N}$ i m ceo broj. Time je definisana eksponecijalna funkcija a^r , kada je r racionalan broj sa sledećim osobinama za $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$:

$$E'_1) a^1 = a > 0;$$

$$E'_2) a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1+r_2};$$

$$E'_3) r_1 < r_2 \text{ povlači } a^{r_1} < a^{r_2};$$

$$E'_4) \lim_{r \rightarrow r_0, r \in \mathbb{Q}} a^r = a^{r_0}, \text{ gde je } r_0 \text{ fiksiran racionalan broj.}$$

Pokazaćemo da važi E'_4 . Prvo ćemo pokazati da je $\lim_{r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}} a^r = 1$. Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/n} = 1$ to za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da je

$$1 - \epsilon < a^{-1/n_0} \quad \text{i} \quad a^{1/n_0} < 1 + \epsilon.$$

Odatle sledi, za $s \in \mathbb{Q}$ sa osobinom $|s| < \frac{1}{n_0}$, da je

$$1 - \epsilon < a^s < 1 + \epsilon \quad (3.11)$$

jer je $a^{-1/n_0} < a^s < a^{1/n_0}$ zbog E'_3 .

Sada možemo pokazati da uopšte važi E'_4 . Za proizvoljno $\epsilon > 0$ na osnovu (3.11) odaberimo $\delta > 0$ tako da $|s| < \delta$ povlači

$$1 - \frac{\epsilon}{a^{r_0}} < a^s < 1 + \frac{\epsilon}{a^{r_0}}, \quad (3.12)$$

(ϵ smo zamenili u (3.11) sa $\frac{\epsilon}{a^{r_0}}$, a^{r_0} je fiksni broj). Uzimajući da je $s = r - r_0$ i množeći (3.12) sa a^{r_0} , imamo

$$a^{r_0} - \epsilon = a^{r_0}(1 - a^{-r_0}) < a^r = a^{r_0} \cdot a^{r-r_0} < a^{r_0}(1 + a^{-r_0}) = a^{r_0} + \epsilon.$$

Odatle sledi E'_4 .

Prethodno navedena osobina E'_4 navodi nas da uvedemo eksponencijalnu funkciju definisanu za sve realne brojeve.

Za $x \in \mathbb{R}$ definišemo a^x na sledeći način

$$a^x = \lim_{r \rightarrow x, r \in \mathbb{Q}} a^r. \quad (3.13)$$

Za $x \in \mathbb{Q}$ smo dokazali tačnost relacije (3.13), a za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ona nam služi kao definicija, pomoću koje proširujemo definiciju eksponencijalnih funkcija na ceo skup \mathbb{R} .

Napomena. Granična vrednost u (3.13) postoji, što ovde nećemo dokazivati. Primećimo da važi $a^x = \sup_{r < x, r \in \mathbb{Q}} a^r = \inf_{r > x, r \in \mathbb{Q}} a^r$.

Na osnovu (3.13) slede osnovne osobine eksponencijalne funkcije. Za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ važi

$$E_1) a^1 = a > 0;$$

$$E_2) a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2};$$

$$E_3) x_1 < x_2 \text{ povlači } a^{x_1} < a^{x_2};$$

$$E_4) \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}} a^x = a^{x_0};$$

$E_5)$ Skup vrednosti funkcije a^x je skup svih realnih brojeva tj.

$$\{a^x : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+.$$

Pokazaćemo da važi E_4 . Postupak je analogan dokazu osobine E'_4 . Prvo ćemo pokazati da je $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbb{R}} a^z = 1$. Za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da je

$$1 - \epsilon < a^{-1/n_0} \quad \text{i} \quad a^{1/n_0} < 1 + \epsilon.$$

Oдавде sledi za $|z| < \frac{1}{n_0}$ prema E_2 da je

$$1 - \frac{1}{n_0} < a^z < 1 + \frac{1}{n_0}, \quad \text{tj.} \quad \lim_{z \rightarrow 0} a^z = 1. \quad (3.14)$$

Uzimajući za dato $\epsilon > 0$ da je u (3.14) $\frac{1}{n_0} = \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$ i $\frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$, tada imamo da $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$ (za $z = x - x_0$) povlači

$$1 - \frac{\epsilon}{a^{x_0}} < a^{x-x_0} < 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}},$$

Množeći levu i desnu stranu prethodne jednakosti sa a^{x_0} , dobijamo kao posledicu osobinu E_4 .

U slučaju da je $0 < a < 1$ važe sve osobine osim E_3 , koja se zamenjuje osobinom

E_3^0) $x_1 < x_2$ povlači $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Posebno, za $a = e$ imamo eksponencijalnu funkciju $y = e^x$ ili $y = \exp x$.

Logaritamska funkcija $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Na osnovu osobine E_3 , odnosno E_3^0 , eksponencijalne funkcije $y = a^x$ sledi da ona obostrano jednoznačno preslikava skup \mathbb{R} na skup \mathbb{R}^+ . Otuda sledi postojanje inverzne funkcije sa skupa \mathbb{R}^+ na skup \mathbb{R} , koju nazivamo *logaritamska funkcija* i označavamo je sa $y = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}^+$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Na osnovu osobina E_1 - E_5 za eksponencijalnu funkciju kada je $a > 1$ (umesto uslova E_3 uslov E_3^0 , za $0 < a < 1$), slede osobine logaritamske funkcije za $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

L_1) $\log_a a = 1$;

L_2) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

L_3) $x_1 < x_2$ povlači $\log_a x_1 < \log_a x_2$, za $a > 1$;

L_3^0) $x_1 < x_2$ povlači $\log_a x_1 > \log_a x_2$, za $0 < a < 1$;

$$L_4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^+} \log_a x = \log_a x_0;$$

L_5) Skup vrednosti logaritamske funkcije je skup svih realnih brojeva tj.

$$\{\log_a x \mid x \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}.$$

Pokazaćemo da važi L_4). Neka je $\epsilon > 0$. Za ϵ -okolinu tačke x_0 , tj. interval $(\log_a x_0 - \epsilon, \log_a x_0 + \epsilon)$ biramo okolinu $(x_0 a^{-\epsilon}, x_0 a^\epsilon)$ tačke x_0 , koja se funkcijom \log_a cela preslika u ϵ -okolinu tačke $\log_a x_0$, tj. interval $(\log_a x_0 - \epsilon, \log_a x_0 + \epsilon)$, pa odatle sledi prema (3.3) da važi L_4).

Naime, za $x \in (x_0 a^{-\epsilon}, x_0 a^\epsilon)$ važi

$$a^{-\epsilon} < \frac{x}{x_0} < a^\epsilon.$$

Na osnovu osobine L_3) sledi

$$-\epsilon = \log_a a^{-\epsilon} < \log_a \left(\frac{x}{x_0} \right) < \log_a a^\epsilon = \epsilon.$$

Prethodna nejednakost, zbog osobine L_2), daje

$$-\epsilon < \log_a x - \log_a x_0 < \epsilon \quad \text{tj.} \quad \log_a x \in (\log_a x_0 - \epsilon, \log_a x_0 + \epsilon),$$

što je i trebalo dokazati.

Posebno, kada je osnova $a = e$, logaritamska funkcija se naziva *prirodni logaritam* i označava sa $\ln x (= \log_e x)$.

Osobina L_2), za $x_1 = x_2 = x$, daje

$$\log_a x^2 = 2 \log_a x.$$

Prethodna jednakost se matematičkom indukcijom može uopštiti:

$$\log_a x^n = n \log_a x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sada se može predstaviti *stepena funkcija* na sledeći način. Za $s \in \mathbb{R}$ je

$$x^s = a^{s \log_a x}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Koristeći konstrukciju eksponencijalne funkcije i osobinu L_4) može se pokazati da važi

$$\log_a x^s = s \log_a x, \quad s \in \mathbb{R}^+.$$

3.5 Asimptote

Pomoću granične vrednosti funkcije dobijamo ponašanje funkcije u okolini tačke $x_0 \in \mathbb{R}$ ili kada x teži ka plus i minus beskonačno, što se grafički može izraziti i pomoću asimptota. Mi ćemo proučavati samo vertikalne, horizontalne i kose asimptote, tj. *pravolinijske asimptote*.

Definicija 3.7. Asimptota grafika funkcije $f : A \rightarrow B$ u $u +$, (respektivno $u -$) je prava linija $y = kx + n$ za koju važi

$$\lim_{x \rightarrow +} (f(x) - (kx + n)) = 0 \quad (\text{respektivno} \quad \lim_{x \rightarrow -} (f(x) - (kx + n)) = 0). \quad (3.15)$$

Ako je u (3.15) $k = 0$, tj. ako f ima graničnu vrednost n u $u +$ (respektivno $u -$), tada grafik funkcije f ima *horizontalnu asimptotu* u $u +$ (respektivno $u -$), čija je jednačina $y = n$.

Ako je u (3.15) $k \neq 0$, tada se prava $y = kx + n$ zove *kosa asimptota* grafika funkcije f u $u +$ odnosno u $u -$. Brojevi k i n se u tom slučaju određuju pomoću graničnih vrednosti

$$k = \lim_{x \rightarrow +} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x \rightarrow +} (f(x) - kx),$$

gde se u prethodnim graničnim vrednostima posmatra i slučaj kada $x \rightarrow -$.

Ako, za neko a , domen funkcije f sadrži interval $(a, +)$ i za svako $M > 0$ postoji $T > a$, sa osobinom da za $x > T$, važi $f(x) > M$, tada kažemo da f teži ka plus beskonačno kada $x \rightarrow +$ i to označavamo sa

$$\lim_{x \rightarrow +} f(x) = + \infty.$$

Analogna značenja imaju i oznake

$$\lim_{x \rightarrow +} f(x) = - \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -} f(x) = + \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -} f(x) = - \infty.$$

Definicija 3.8. Vertikalna asimptota grafika funkcije $f : A \rightarrow B$ u tački x_0 je prava linija $x = x_0$ ako f teži bilo ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ kada bilo $x \rightarrow x_0 + 0$ ili $x \rightarrow x_0 - 0$.

Primer 3.20. Odredićemo asimptote grafika sledećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$; $f(x) = \frac{2}{1-x^2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$; $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

a) Prirodni domen funkcije f je skup $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. Njen grafik, dat na slici 3.6, ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = -1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1-x^2} = - \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2}{1-x^2} = + \infty.$$

Primetimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1-x^2} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{1-x^2} = -\infty \quad ;$$

Grafik funkcije ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kad $x \rightarrow +\infty$ i kad $x \rightarrow -\infty$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0.$$

b) Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = 3$ i kosu asimptotu $y = x + 3$ kad $x \rightarrow +\infty$ i kad $x \rightarrow -\infty$ (slika 3.7).

3.6 Asimptotsko ponašanje

U ovom delu definisaćemo oznake \sim , "malo o" i "veliko O", kad $x \rightarrow x_0$, koje ćemo koristiti u daljem radu, posebno u Analizi II kod izučavanja nesvojstvenih integrala i redova.

Pretpostavimo da domeni funkcije f i g sadrže skup $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Definicija 3.9. Funkcija f se ponaša kao funkcija g , kad x teži x_0 , ako postoji funkcija α takva da je

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \quad x \in (a, b), \quad x \neq x_0, \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 1.$$

Tada pišemo $f(x) \sim g(x)$, kad $x \rightarrow x_0$. Dovoljan uslov (ali ne i potreban!) za asimptotsko ponašanje $f(x) \sim g(x)$, kad $x \rightarrow x_0$, jeste jednakost

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Primer 3.21. Dokazaćemo asimptotsku relaciju $e^x - 1 \sim \frac{1}{2} \sin(2x)$, $x \rightarrow 0$.

Iz jednakosti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \frac{1}{2}$, po definiciji 3.9 sledi

$$e^x - 1 \sim \frac{\sin(2x)}{2}, \quad x \rightarrow 0.$$

Primer 3.22. Odredićemo graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 2 \operatorname{arctg}(2x) + 3x^2}{\ln(1 + 2x + \sin^2 x) + xe^x}$ korišćenjem asimptotskog ponašanja.

Na osnovu sledećih asimptotskih ponašanja:

$$\sin(3x) \sim 3x, \quad \arctg(2x) \sim 2x, \quad xe^x \sim x, \quad \ln(1 + 2x + \sin^2 x) \sim 2x + \sin^2 x \sim 2x,$$

kad $x \rightarrow 0$ (dokazati!), imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) + 2 \arctg(2x) + 3x^2}{\ln(1 + 2x + \sin^2 x) + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{3x} = \frac{7}{3}.$$

Definicija 3.10. Kažemo da je funkcija f "malo o" funkcije g kad x teži x_0 ako postoji funkcija $\alpha(x)$ takva da je

$$f(x) = \alpha(x) \cdot g(x), \quad x \in (a, b), \quad x \neq x_0, \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Tada pišemo $f = o(g)$, kad $x \rightarrow x_0$.

Ako je $g(x) \neq 0$, za svako $x \neq x_0$, tada je potreban i dovoljan uslov za asimptotsku relaciju $f(x) = o(g(x))$, kad $x \rightarrow x_0$, jednakost

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Posebno, ako je $g(x) \equiv 1$, tada $f(x) = o(1)$, kad $x \rightarrow x_0$, znači da f teži nuli kad $x \rightarrow x_0$.

Primer 3.23. Pokazaćemo $e^x - 1 = x + o(x)$, $x \rightarrow 0$. Data relacija sledi iz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 1 - 1 = 0.$$

Definicija 3.11. Funkcija f je "veliko O" funkcije g , kad x teži x_0 , ako postoji konstanta $K > 0$ takva da je

$$|f(x)| \leq K \cdot |g(x)|, \quad x \in (a, b), \quad x \neq x_0.$$

Tada pišemo $f(x) = O(g(x))$, kad $x \rightarrow x_0$. Posebno, ako je $g(x) \equiv 1$, $x \in (a, b)$, tada $f(x) = O(1)$, kad $x \rightarrow x_0$, znači da je, za neko $\delta > 0$, funkcija f ograničena na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Asimptotska ponašanja se mogu definisati i u slučajevima kad $x \rightarrow x_0 + 0$, $x \rightarrow x_0 - 0$, $x \rightarrow +\infty$, odnosno $x \rightarrow -\infty$, naravno uz odgovarajući uslov o definicionom skupu funkcije.

3.7 Nепреkidnost funkcije

3.7.1 Definicija nепреkidne funkcije

Videli smo kako se pomoću granične vrednosti funkcije opisuje ponašanje funkcije u okolini tačke x_0 . Sada će nas interesovati one funkcije koje imaju određeno ponašanje (nепреkidnost) u okolini tačke x_0 u kojoj su i definisane. Naime, interesuju nas funkcije koje za "malu" promenu x u odnosu na x_0 prouzrokuju "malu" promenu vrednosti funkcije $f(x)$ u odnosu na vrednost $f(x_0)$. Kao što smo već ranije videli, promena argumenta se opisuje rastojanjem x od x_0 , tj. $|x - x_0|$, dok se promena vrednosti funkcije opisuje rastojanjem $f(x)$ od $f(x_0)$, tj. $|f(x) - f(x_0)|$. Tada prethodnu opisanu osobinu nепреkidnosti funkcije možemo precizno definisati.

Definicija 3.12. *Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je nепреkidna u tački $x_0 \in A$ ako za svako $\epsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da važi implikacija*

$$(\forall x \in A) \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon .$$

Iz ove definicije sledi da se nепреkidnost funkcije ispituje samo u onim tačkama u kojima je ona definisana. Međutim, nije obavezno (kao kod granične vrednosti funkcije) da posmatrana tačka bude i tačka nagomilavanja domena funkcije. No kako je u svakoj izolovanoj tački funkcija trivijalno nепреkidna to nam kao važne tačke za ispitivanje nепреkidnosti funkcije ostaju tačke nagomilavanja, a za koje važi sledeća karakterizacija pomoću granične vrednosti.

Teorema 3.9. *Neka je tačka $x_0 \in A$ tačka nagomilavanja domena funkcije $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Tada je f nепреkidna u tački x_0 ako i samo ako je*

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in A} f(x) = f(x_0).$$

Dokaz sledi direktno iz definicije granične vrednosti funkcije u tački i definicije 3.12.

U praksi, se obično pojavljuju sledeća tri slučaja.

1. Neka je realna funkcija f definisana na intervalu $(a, b) \subset A$ i neka tačka x_0 pripada (a, b) . Funkcija f je nепреkidna u tački x_0 ako važe sledeća dva uslova:

$$\text{postoji } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ i važi jednakost } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Neka je realna funkcija f definisana na skupu koji sadrži interval $[x_0, b)$. Funkcija f je neprekidna sa desna u tački x_0 ako važe sledeća dva uslova:

$$\text{postoji } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \text{ i važi jednakost } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

3. Neka je realna funkcija f definisana na skupu koji sadrži interval $(a, x_0]$. Funkcija f je neprekidna sa leva u tački x_0 ako važe sledeća dva uslova:

$$\text{postoji } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \text{ i važi jednakost } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Definicija 3.13. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna na skupu $B \subset A$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa B .

Posebno, funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b] \subset A$ ako je neprekidna na otvorenom intervalu (a, b) i ako važi (videti slučajeve 2. i 3.):

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b).$$

3.7.2 Osobine neprekidnih funkcija

Teorema 3.10. Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 , tada su u toj tački neprekidne i funkcije koje predstavljaju njihov

zbir $f + g$; razliku $f - g$; proizvod $f \cdot g$; količnik $\frac{f}{g}$, ako je $g(x_0) \neq 0$.

Dokaz. Pokazaćemo samo da je zbir dve neprekidne funkcije u tački x_0 neprekidan u toj tački, i to za slučaj kada je x_0 tačka nagomilavanja njihovih domena. Ostali slučajevi se dokazuju analogno.

Neka su funkcije f i g neprekidne u tački x_0 . Prema teoremi 3.9 tada važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0).$$

Kako je $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ i granična vrednost zbira funkcija jednaka zbiru graničnih vrednosti funkcija, to je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ &= f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0). \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 3.11. Ako je funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u tački $x_0 \in A$ i funkcija $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u tački $f(x_0)$, tada je i složena funkcija $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna u tački x_0 .

Teorema 3.12. *Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 , tada postoji $\delta > 0$ tako da je ona ograničena intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Dokaz. Funkcija f je neprekidna u tački x_0 , pa za $\epsilon = 1$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ važi $-1 + f(x_0) < f(x) < 1 + f(x_0)$, odakle sledi tvrđenje teoreme. \square

Osnovne elementarne funkcije su neprekidne na celom njihovom definicionom skupu:

polinom je neprekidna funkcija na celom skupu realnih brojeva \mathbb{R} (sledi iz neprekidnosti na \mathbb{R} funkcije $f(x) = x$ i prethodne teoreme);

racionalna funkcija $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ je neprekidna na skupu $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$;

sinusna i kosinusna funkcija su neprekidne na celom skupu \mathbb{R} jer je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0;$$

funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ je neprekidna na skupu $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dok je funkcija $f(x) = \operatorname{ctg} x$ neprekidna na skupu $\mathbb{R} \setminus \{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je neprekidna na skupu \mathbb{R} , jer je $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$;

logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je neprekidna na $(0, +\infty)$, jer je $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Na osnovu prethodnog i neprekidnosti ciklotometrijskih funkcija, elementarne funkcije su neprekidne na svom prirodnom definicionom skupu.

3.7.3 Prekidi funkcija

Definicija 3.14. *Ako funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ nije neprekidna u tački $x_0 \in A$, kažemo da ona u toj tački ima prekid.*

Primer 3.24.

a) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x-1}$ nije definisana u tački $x = 1$, tako da se ne može ni ispitivati neprekidnost ove funkcije u tački 1. (Pogrešno bi bilo reći da je funkcija f prekidna u tački 1.)

b) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{za } x \neq 1, \\ 2 & \text{za } x = 1 \end{cases}$ je neprekidna u tački $x = 1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 = f(1).$$

c) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{za } x \neq 1, \\ 5 & \text{za } x = 1 \end{cases}$ nije neprekidna u tački $x = 1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 5 = f(1), \quad (\text{uporediti sa b}).$$

d) Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{za } x \neq 0, \\ 10 & \text{za } x = 0 \end{cases}$ je prekidna u tački $x = 0$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 10 = f(0),$$

Primetimo da je funkcija f definisana u tački 0 i ima u njoj graničnu vrednost jednaku 1. Da je funkcija f bila definisana u tački 0 sa vrednošću 1, bila bi u njoj i neprekidna.

e) Funkcija

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0, \\ 0 & \text{za } x = 0, \\ -1 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

je prekidna u tački $x = 0$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x).$$

Za razliku od c) ili d), ovde je potpuno svejedno kako je funkcija definisana u tački $x = 0$ (videti sliku 3.8).

Definicija 3.15. Ako funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ima prekid u tački $x_0 \in A$, kažemo da funkcija u toj tački ima

1. prividan prekid, ako postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ i važi $L \neq f(x_0)$;
2. prekid prve vrste, ako postoje $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = L_2$, ali $L_1 \neq L_2$;

3. prekid druge vrste, ako nije ni prividan ni prekid prve vrste.

Funkcije pod b) i c) u zadnjem primeru imaju prividne prekide u $x = 1$ i $x = 0$, respektivno.

Primer 3.25. a) Funkcija $f(x) = [x]$ dodeljuje broju $x \in \mathbb{R}$ najveći ceo broj koji nije veći od x . Dakle, za $k \in \mathbb{Z}$ je

$$\lim_{x \rightarrow k+0} f(x) = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow k-0} f(x) = k - 1,$$

pa f ima prekid prve vrste u svakom celom broju k (slika 3.9).

b) Neka je $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$

Ona je neprekidna na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ali ima prekid prve vrste u tački 1. Grafik ove funkcije je dat na slici 3.10.

Slika 3.11.

c) Funkcija f data sa

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 5, & x < 2, \\ 0, & x = 2, \\ x^2 - 4x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

(slika 3.11), ima prekid prve vrste u tački $x_0 = 2$, i neprekidna je na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Primer 3.26. Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, data sa $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, je neprekidna na svom definicionom skupu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ali nije definisana za $x = 0$ (sl. 3.12). U primeru 3.11 videli smo da f nema graničnu vrednost u 0. Odavde sledi da funkcija F , data sa

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0; \\ L, & x = 0, \end{cases}$$

ima prekid druge vrste u tački 0, nezavisno od izbora broja L (uporediti sa sledećim primerom!).

Slika 3.12. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Slika 3.13. $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Primer 3.27. Funkcija g , data sa $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, je neprekidna na svom definicionom skupu (sl. 3.13). Za razliku od funkcije f iz primera 3.26, ona se

može naknadno definisati u tački 0 tako da postane neprekidna i u tački 0 (a time i na celom \mathbb{R}).

U stvari, videli smo u primeru 3.4 da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

pa je funkcija G , data sa $G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq 0; \\ L, & x = 0, \end{cases}$ neprekidna u tački 0 ako (i samo ako) je $L = 0$.

3.7.4 Neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu

Sledeće teoreme daju dve važne osobine neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu.

Teorema 3.13. (Bolcano-Košijeva teorema) *Neka je funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu $[a, b] \subset A$, i neka je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. Podelimo interval $[a, b]$ na dva jednaka intervala. Ako $f(s) = 0$, gde je $s = \frac{a+b}{2}$, tada je $c = s$ i dokaz je gotov.

Ako je $f(s) \neq 0$, tada jedan od intervala $[a, s]$, $[s, b]$ označimo sa $[a_1, b_1]$, tako da je ispunjen uslov $f(a_1)f(b_1) < 0$ (na osnovu polazne pretpostavke $f(a) \cdot f(b) < 0$). Nastavljajući ovaj postupak na isti način ćemo dobiti ili u jednom od koraka tačku c takvu da je $f(c) = 0$, ili niz intervala $[a_n, b_n]$ od kojih je svaki sledeći sadržan u prethodnom i takav da je $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ ($n \in \mathbb{N}$). U drugom slučaju na osnovu Koši-Kantorovog principa postoji tačka $c \in [a, b]$, koja leži u svim intervalima $[a_n, b_n]$. Na osnovu konstrukcije, nizovi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ imaju osobinu da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Kako su intervali $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, formirani tako da je $f(a_n)f(b_n) < 0$, na primer $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$, $n = 1, 2, \dots$, to na osnovu neprekidnosti funkcije f sledi da je $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$, i $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$. Zato je $f(c) = 0$. \square

Teorema 3.13 je veoma značajna za približno određivanje nula funkcije na intervalu, jer navedeni dokaz daje i algoritam za nalaženje približne vrednosti nule funkcije.

Kao posledica prethodne teoreme dobija se Brauerova¹ teorema o nepokretnoj tački u skupu \mathbb{R} .

¹L. E. J. Brouwer (1881-1966)

Teorema 3.14. Neka je $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ непрекидна funkcija. Tada postoji $c \in [a, b]$ tako da je $f(c) = c$.

Dokaz. Ako je $f(a) = a$ ili $f(b) = b$ dokaz je gotov. Ako je $f(a) \neq a$ i $f(b) \neq b$, tada je $f(a) > a$ i $f(b) < b$. Neka je $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana na sledeći način

$$g(x) = f(x) - x, \quad x \in [a, b].$$

Tada je $g(a) = f(a) - a > 0$ i $g(b) = f(b) - b < 0$, te na osnovu teoreme 3.13 postoji $c \in (a, b)$ takvo da je $g(c) = 0$ odnosno $f(c) = c$. \square

Napomena. Ako je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $c \in [a, b]$ je takvo da važi $f(c) = c$, c se naziva *nepokretna tačka preslikavanja* f .

Primer 3.28. Pokazaćemo da jednačina $\cos x - x = -1$ ima rešenje.

Funkcija

$$f(x) = \cos x - x + 1$$

je непрекидна na skupu \mathbb{R} i na intervalu $[0, \pi]$ menja znak, jer je $f(0) = 2$, a $f(\pi) = -1$. Prema teoremi 3.13, tada na intervalu $[0, \pi]$ postoji bar jedan broj c takav da je $f(c) = 0$. Očevidno je tada broj c i rešenje date jednačine.

Primer 3.29. Na primeru funkcije $f : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, date sa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & -3 \leq x < 0; \\ -(x^2 + 1), & 0 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

pokazaćemo da se uslov o непрекидности funkcije u teoremi 3.13 ne može izostaviti. Funkcija f nije непрекидна u 0. U krajnjim tačkama intervala $[-3, 3]$ funkcija f ima vrednosti različitog znaka, jer je $f(-3) = 10$ i $f(3) = -10$. Međutim, $f(x) \neq 0$ za sve $x \in [-3, 3]$, tj. f nema nulu na datom intervalu.

Metoda polovljenja. Dokaz teoreme 3.13 se koristi za približno rešavanje jednačine $f(x) = 0$ metodom *polovljenja* i veoma je podesna za primenu na računaru. Neka je $f : [a, b] \subset \mathbb{R}$ непрекидно preslikavanje takvo da su $f(a)$ i $f(b)$ različitog znaka. Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, tada je broj $c = \frac{a+b}{2}$ rešenje jednačine $f(x) = 0$. Ako je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, tada postupamo po dokazu teoreme 3.13. Dobijamo niz intervala $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ takvih da je $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, za svako $n \in \mathbb{N}$, te je $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Lako je videti da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$|c - a_n| < \frac{b-a}{2^n}.$$

Koristeći gornju nejednakost, koja služi za ocenu greške koja nastaje pri aproksimaciji rešenja c brojem a_n , možemo za dato $\epsilon > 0$ odrediti $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|c - a_{n_0}| < \epsilon$ i tako postići željenu tačnost aproksimacije rešenja c jednačine $f(x) = 0$ brojem a_{n_0} .

Važna posledica prethodne teoreme 3.13 je da neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu uzima sve međuvrednosti između dve vrednosti funkcije u dve tačke iz tog intervala.

Teorema 3.15. *Neka je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na intervalu (a, b) , i neka je za dve tačke a i b tog intervala $f(a) = A < f(b) = B$. Tada važi:*

$$\left(\forall C \in (A, B) \right) \left(\exists c \in (a, b) \right) f(c) = C.$$

Dokaz. Neka je $a < b$. Funkciju $g(x) = f(x) - C$ je definisana i neprekidna na intervalu $[a, b]$ i važi

$$g(a)g(b) = (A - C)(B - C) < 0,$$

pa na osnovu teoreme 3.13 postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da je $g(c) = f(c) - C = 0$.
□

Neprekidna funkcija koja nije konstanta uvek preslikava interval na neki drugi interval.

Primer 3.30. Funkcija $f(x) = \sin(x) + \cos(x) - x^2 + 3$ dostiže na intervalu $[0, 1]$ vrednost 2. Zaista, funkcija f je neprekidna na intervalu $[0, 1]$ i u krajnjim tačkama dostiže redom vrednosti 4 i 1, jer je $f(0) = 4$ i $f(1) = 1$. Iz teoreme 3.15 sledi da postoji na intervalu $(0, 1)$ tačka c takva da je $f(c) = 2$.

Videli smo u teoremi 3.12 da neprekidnost funkcije u tački povlači njenu lokalnu ograničenost, tj. ograničenost u nekoj okolini te tačke. Na zatvorenom intervalu važi globalna ograničenost.

Teorema 3.16. *Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ je ograničena.*

Dokaz. Kako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, ona je neprekidna u svakoj tački intervala $[a, b]$. Na osnovu teoreme 3.12 za svaku tačku $x \in [a, b]$ postoji otvoreni interval $U(x)$ takav da je funkcija f ograničena na skupu $[a, b] \cap U(x)$. Familija takvih okolina $U(x)$, $x \in [a, b]$, pokriva interval $[a, b]$, pa se prema Hajne-Borelovoj osobini zatvorenog intervala može izdvojiti konačna familija $U(x_1), \dots, U(x_n)$ intervala koja pokriva interval $[a, b]$. Na svakom od tih intervala $U(x_j)$ funkcija f je ograničena, tj. postoje realni brojevi $m_1, \dots, m_n, M_1, \dots, M_n$ takvi da važi

$$m_j \leq f(x) \leq M_j, \quad x \in [a, b] \cap U(x_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Za svako $x \in [a, b]$ važi

$$\min\{m_1, \dots, m_n\} \leq f(x) \leq \max\{M_1, \dots, M_n\},$$

što znači da je f ograničena funkcija na celom intervalu $[a, b]$. \square

Teorema 3.17. *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada postoje tačke $c \in [a, b]$ i $d \in [a, b]$, u kojima funkcija f ima minimum i maksimum, odnosno važi*

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d), \quad x \in [a, b].$$

Dokaz. Prema teoremi 3.16 funkcija f je ograničena pa postoje realni brojevi m i M takvi da je

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Pokazaćemo da postoji tačka $d \in [a, b]$ takva da je $f(d) = M$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da takva tačka d ne postoji. Tada važi

$$f(x) < M, \quad \forall x \in [a, b],$$

pa je funkcija $g(x) = M - f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, i $g(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Funkcija $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ neprekidna na $[a, b]$, i prema teoremi 3.16 ona je ograničena na $[a, b]$. Znači, postoji realan broj $K > 0$ takav da je

$$h(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K, \quad x \in [a, b],$$

odakle je

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K} = M_1 < M, \quad \text{za svako } x \in [a, b].$$

Broj M_1 je gornje ograničenje skupa vrednosti funkcije f , ali je $M_1 < M$, što je suprotno pretpostavci da je $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Analogno se pokazuje da postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = m$. \square

Primer 3.31. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na intervalu $[0, 1]$ i ima minimum u tački 0 i maksimum u tački 1.

Primer 3.32. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je neprekidna na intervalu $(0, 1)$ ali nije ograničena na tom intervalu. Međutim na intervalu $[r, 1]$, gde je $0 < r < 1$ funkcija f je ograničena, a na intervalu $[r, 1]$, gde je $0 < r < 1$, ona ima i maksimum i minimum.

Primer 3.33. Za funkciju $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, odrediti njen infimum, supremum, i, ako postoje, minimum i maksimum na datom intervalu I :

a) $I = [-2, 0)$; b) $I = [1, 3)$; a) $I = [-2, 3]$;

a) Funkcija $f(x) = x^2 + 1$ nad intervalom $[-2, 0)$ ima infimum u tački 0, koji je jednak 1. Ova funkcija ima maksimum (dakle i supremum), koji je dostignut u tački -2 , i taj maksimum je jednak $f(-2) = 5$.

b) $\inf_{x \in [1, 3)} f(x) = 2$, $\min_{x \in [1, 3)} f(x) = 2$, $\sup_{x \in [1, 3)} f(x) = 10$, ne postoji $\max_{x \in [1, 3)} f(x)$.

c) $\inf_{x \in [-2, 3]} f(x) = \min_{x \in [-2, 3]} f(x) = f(0) = 1$, $\sup_{x \in [-2, 3]} f(x) = \max_{x \in [-2, 3]} f(x) = f(3) = 10$.

Primetimo da se teorema 3.17 primenjuje samo u slučaju c); primeri a) i b) pokazuju da ta teorema nije tačna bez uslova o zatvorenosti posmatranog intervala.

Videli smo da se neprekidnost funkcije na nekom skupu definisala preko neprekidnosti te funkcije u svakoj tački tog skupa. Sad ćemo uvesti drugu vrstu neprekidnosti koja se definiše odmah na skupu.

Definicija 3.16. Funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna na skupu A ako za svako $\epsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$ tako da za sve $x', x'' \in A$ važi implikacija

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

Primetimo da u prethodnoj definiciji $\delta > 0$ zavisi samo od $\epsilon > 0$, $\delta = \delta(\epsilon)$, a ne i od tačke x_0 (kao što je to bilo kod neprekidnosti u tački x_0 , gde je $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$). Očigledno je da iz uniformne neprekidnosti funkcije f na skupu A sledi i neprekidnost u bilo kojoj tački $x_0 \in A$. Treba samo u definiciji 3.16 uzeti $x' = x$ i $x'' = x_0$. Obrnuto u opštem slučaju nije tačno.

Primer 3.34. Funkcija $f(x) = x^2$ je neprekidna na \mathbb{R} . Pokazaćemo da ona nije uniformno neprekidna na \mathbb{R} . U tu svrhu uzmimo dva niza (x_n') $_{n \in \mathbb{N}}$ i (x_n'') $_{n \in \mathbb{N}}$ definisana sa $x_n' = \sqrt{n+1}$ i $x_n'' = \sqrt{n}$, respektivno. Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n' - x_n'') = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

to za bilo koje $\epsilon > 0$ uvek postoje x_n' i x_n'' da je $|x_n' - x_n''| < \epsilon$, ali je uvek

$$f(x_n') - f(x_n'') = (n+1) - n = 1,$$

što se ne može učiniti manjim od $\epsilon < 1$.

Ipak, u specijalnom slučaju važi sledeća teorema.

Teorema 3.18. *Ako je funkcija f непрекидна na zatvorenom intervalu $[a, b]$, tada je ona i uniformno непрекидна na tom intervalu.*

Dokaz. Neka je funkcija f непрекидна nad intervalom $[a, b]$. Pretpostavimo da tvrđenje teoreme nije tačno, tj. da postoji $\epsilon > 0$ tako da za svako $\delta > 0$ postoje tačke x' i x'' sa osobinom da je

$$|x' - x''| < \delta \quad \text{i} \quad |f(x') - f(x'')| \geq \epsilon.$$

Neka je sada $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva koji konvergira 0. Iz prethodnog sledi da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje tačke x_n' i x_n'' iz $[a, b]$, takve da je

$$|x_n' - x_n''| < \delta_n \quad \text{i} \quad |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon. \quad (3.16)$$

Prema Bolcano–Vajerštrasovom stavu za nizove, teorema 2.7, iz svakog ograničenog niza realnih brojeva, te i iz niza $(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$, može se izdvojiti konvergentan podniz, koji konvergira ka nekoj tački $x_0' \in [a, b]$ (da granica x_0' pripada intervalu $[a, b]$ sledi po napomeni iza teoreme 2.3). Da ne bismo komplikovali oznake, uzećemo da upravo niz $(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka x_0 . Kako je $|x_n' - x_n''| < \delta_n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, to mora biti i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n'' = x_0$.

Prema pretpostavci, f je непрекидна funkcija na $[a, b]$, pa je f непрекидна i u tački x_0 . To znači da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = f(x_0), \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'') = 0.$$

Međutim, to je u suprotnosti sa izborom tačaka x_n' i x_n'' , za koje smo pretpostavili da za sve $n \in \mathbb{N}$ važe nejednakosti u (3.16). \square

Glava 4

Izvod funkcije

U ovoj glavi pomoću granične vrednosti funkcije uvodimo važan pojam izvoda funkcije, koji predstavlja osnov tzv. diferencijalnog računa. Pokazaćemo da izvod funkcije ima niz pogodnih osobina prema zbiru, proizvodu, količniku i kompoziciji funkcija, kao i inverznoj funkciji. Izvod omogućava jednostavne karakterizacije osobina funkcije (monotonost, ekstremne vrednosti i konveksnost), što obezbeđuje precizno ispitivanje funkcija.

Slika 4.1.

4.1 Definicija prvog izvoda funkcije

Neka je realna funkcija f definisana na intervalu (a, b) i neka je x_0 fiksirana tačka iz intervala (a, b) , a x proizvoljna tačka iz intervala (a, b) . Tada se veličina $y = f(x) - f(x_0)$ naziva *priraštaj nezavisno promenljive (argumenta) x u tački x_0* , a veličina

$$y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0),$$

koja predstavlja odgovarajuću promenu zavisno promenljive y , naziva *priraštaj funkcije f u tački x_0* . Primetimo da y zavisi od x_0 i x , tj. $y = y(x_0, x)$.

Neka je $x > 0$ i neka su tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $Q(x_0 + x, f(x_0 + x))$ na grafiku funkcije f , a tačka $T(x_0 + x, f(x_0))$ podnožje normale iz P na ordinatu kroz Q (slika 4.1). Tada je $x = \overline{PT}$ i $y = \overline{QT}$, tj. priraštaj nezavisno promenljive i priraštaj funkcije u tački x_0 su respektivno dužine kateta PT i QT pravouglog trougla PTQ .

Za pravu meru brzine promene funkcije, moramo promenu y uporediti sa promenom x , tačnije, važan je količnik $\frac{y}{x}$ priraštaja funkcije y i priraštaja nezavisno promenljive x . Koristeći oznake sa slike 4.1, ta je veličina jednaka

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = \frac{\overline{QT}}{\overline{PT}}. \quad (4.1)$$

Posmatraćemo ovu veličinu na dve konkretne funkcije.

Primer 4.1. Neka je $f(x) = x$ i neka je prvo $x_0 = 2$.

Ako uzmemo $x = 1$, onda imamo $x = 1 - 2 = -1$, te je

$$\frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

dok za (recimo) $x = 3$ imamo $x = 3 - 2 = 1$ i $y = 1$, pa je $\frac{y}{x} = 1$.

Ako bismo uzeli drugu vrednost za x_0 , na primer $x_0 = 1$, i $x = 3$, onda bismo imali $x = 3 - 1 = 2$ i $y = f(3) - f(1) = 2$, te je $\frac{y}{x} = 1$.

Primetimo da za funkciju $f(x) = x$ važi za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{R}$ i za $x = x - x_0$ da je $y = x - x_0$, te je količnik iz (4.1) jednak

$$\frac{y}{x} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Primer 4.2. Neka je $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, i neka je $x_0 = 2$.

Uzimajući prvo $x = 1$, imamo $x = -1$ i $y = g(1) - g(2) = 1 - 4 = -3$, što daje

$$\frac{y}{x} = \frac{-3}{-1} = 3. \quad (4.2)$$

Za drugu tačku $x = 3$ imamo $x = x_0 - x = 1$ i $y = g(3) - g(2) = 9 - 4 = 5$, pa je $\frac{y}{x} = 5$. Prisetimo da se ova vrednost razlikuje od prethodno dobijene vrednosti količnika $\frac{y}{x}$ u (4.2).

Ako bismo uzeli drugu vrednost za x_0 , na primer $x_0 = 1$, za $x = 3$ imali bismo $x = 3 - 1 = 2$ i $y = g(3) - g(1) = 8$, te je

$$\frac{y}{x} = \frac{8}{2} = 4.$$

Dakle, opet smo dobili različite vrednosti za $\frac{y}{x}$, što pokazuje zavisnost količnika (4.1) od x i x_0 .

Važi uopšte za $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, gde su x i x_0 proizvoljne tačke iz \mathbb{R} , da je $x = x - x_0$, $y = x^2 - x_0^2$, što daje

$$\frac{y}{x} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 = 2x_0 + x.$$

Kao što nam pokazuje zadnji primer, veličina $\frac{y}{x}$ u opštem slučaju zavisi od tačaka x iz okoline tačke x_0 . Kako bismo izbegli ovu zavisnost, posmatračemo graničnu vrednost količnika $\frac{y}{x}$ kad $x \rightarrow x_0$, tj. kad $x \rightarrow 0$.

Definicija 4.1. *Neka je realna funkcija f definisana na intervalu (a, b) i neka $x_0 \in (a, b)$. Granična vrednost*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}, \quad (4.3)$$

ako postoji, naziva se prvi izvod funkcije f u tački x_0 , i označava se sa $f'(x_0)$.

Pored $f'(x_0)$, za prvi izvod funkcije f u tački x_0 koristi se i oznaka $\frac{dy(x_0)}{dx}$, tj. $\frac{df(x_0)}{dx}$. Ako funkcija $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački x_0 kažemo još i da je ona *diferencijabilna u tački $x_0 \in (a, b)$* (videćemo u poglavlju 4.8 objašnjenje za prethodnu oznaku i naziv).

Primer 4.3. Na osnovu primera 4.1 imamo da je za funkciju $f(x) = x$ izvod u tački $x_0 = 2$ dat sa

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 + x) - f(2)}{x} = 1.$$

Ostavljamo čitaocu da proverí da je $f'(x_0) = 1$ u proizvoljnoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$.

Primer 4.4. Na osnovu primera 4.2 imamo da je za funkciju $g(x) = x^2$ izvod u nekoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$ dat sa

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + x) - g(x_0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + x)^2 - x_0^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x_0 x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x_0 + x) = 2x_0. \end{aligned}$$

Primer 4.5. Prvi izvod funkcije $f(x) = \frac{3}{x}$, $x \neq 0$, u tački $x_0 \neq 0$ je po definiciji 4.1 jednak

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x_0 + x} - \frac{3}{x_0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x_0(x_0 + x)x} = -\frac{3}{x_0^2}.$$

Primer 4.6. Po definiciji, prvi izvod funkcije $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, u tački $x_0 > 0$ određuje se na sledeći način:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + x} - \sqrt{x_0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x_0 + x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + x} + \sqrt{x_0})}{x(\sqrt{x_0 + x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x_0 + x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Primetimo da je funkcija f neprekidna u tački $x_0 = 0$, ali da nema izvod u toj tački, jer ne postoji granična vrednost

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0 + x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Definicija 4.2. Funkcija ima izvod na skupu $A_1 \subset (a, b)$ ako ima izvod u svakoj tački skupa A_1 .

U tom se slučaju funkcija $f' : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ zove izvodna funkcija za f (ili: *prvi izvod funkcije f*).

Primetimo da je za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, izvodna funkcija jednaka $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sa definicionim skupom $A_1 = (0, \infty)$, što je striktno manji skup (u smislu inkluzije) od $A = [0, \infty)$ (videti primer 4.6).

Primer 4.7. Korišćenjem definicije prvog izvoda 4.1, pokazaćemo da su prvi izvodi

osnovnih elementarnih funkcija x^n , x^{-n} , $\sin x$, $\cos x$, a^x , e^x , $\log_a x$, $\ln x$, dati sa

- a) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;
 b) $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$;
 c) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
 d) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
 e) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
 f) $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
 g) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$;
 h) $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
 i) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;
 j) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

a) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je prvi izvod funkcije $f(x) = x^n$ u tački $x \in \mathbb{R}$ po definiciji jednak:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x)^n - x^n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}x^2 + \dots + x^n \right) - x^n}{x} \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

b) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je prvi izvod funkcije $f(x) = x^{-n}$ u tački $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ po definiciji jednak:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+x)^{-n} - x^{-n}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{x^n - (x+x)^n}{x^n(x+x)^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n(x+x)^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \left(x^n + nx^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}x^2 + \dots + x^n \right)}{x} \\ &= \frac{1}{x^{2n}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(-nx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}x - \dots - x^{n-1} \right) = \frac{1}{x^{2n}} \cdot (-nx^{n-1}) \\ &= -nx^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

c) Za $f(x) = \sin x$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo po definiciji

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x \\ &= \cos x. \end{aligned}$$

Koristili smo adicijonu formulu

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right), \quad (4.4)$$

za $\alpha = x + \Delta x$ i $\beta = x$ i neprekidnost funkcije $\cos x$.

d) Za $f(x) = \cos x$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo po definiciji

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

Koristili smo adicijonu formulu

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

za $\alpha = x + \Delta x$ i $\beta = x$ i neprekidnost funkcije $\sin x$.

e) Za $f(x) = \operatorname{tg} x$ imamo za $x \notin \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \sin x \cos(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x) \cos x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin((x + \Delta x) - x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x + \Delta x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Koristili smo adicijonu formulu (4.4).

f) Za $f(x) = \operatorname{ctg} x$ imamo za $x \notin \{k \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(x + \Delta x) - \operatorname{ctg} x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x)} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) \sin x - \cos x \sin(x + \Delta x)}{\sin(x + \Delta x) \sin x \Delta x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x + (x + \Delta x))}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x + \Delta x) \sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = - \frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

g) Za funkciju $f(x) = a^x$ prvi izvod u tački $x \in \mathbb{R}$ po definiciji 4.1 je

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Posle smene $t = a^{\Delta x} - 1$, $\Delta x = \frac{\ln(t + 1)}{\ln a}$, pri čemu $t \rightarrow 0$ kada $\Delta x \rightarrow 0$, imamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t + 1)}{\ln a}} = \ln a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + t)^{1/t}} = \ln a \cdot 1 = \ln a.$$

Tako dobijamo

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a, \quad a > 0, a \neq 1.$$

h) Ako je u g) $a = e$, onda dobijamo

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Za funkciju $f(x) = \log_a x$ prvi izvod u tački $x > 0$ je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{x/\Delta x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a} = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Koristili smo graničnu vrednost

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} = e$$

i neprekidnost funkcije $\ln x$.

j) Ako je u i) $a = e$, onda dobijamo za $x > 0$:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}.$$

Postavlja se pitanje kakva je veza između neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije u tački.

Teorema 4.1. *Ako je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u tački $x_0 \in (a, b)$, tada je ona neprekidna u tački x_0 .*

Dokaz. Ako x pripada definicionom skupu funkcije f i $x \neq x_0$, tada je očigledno

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Puštajući da x teži ka x_0 , dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Obrnuto u opštem slučaju nije tačno. Naime, ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 , tada ona ne mora biti i diferencijabilna u tački x_0 (videti sledeći primer 4.8). Dakle, neprekidnost je potreban, *ali ne i dovoljan* uslov za diferencijabilnost funkcije. Drugim rečima, ako funkcija u nekoj tački nije neprekidna, onda ona ne može imati izvod u toj tački.

Primer 4.8. Pokazali smo (videti primer 2.4) da je funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, neprekidna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, pa i u tački 0. Sada ćemo dokazati da ova funkcija *nema* prvi izvod u tački nula.

U tom cilju, pokažimo da za funkciju $f(x) = |x|$ ne postoji $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$, tako što ćemo potražiti levu i desnu graničnu vrednost gornjeg izraza u 0, i uveriti se da su one različite. Za $x < 0$ imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} \\ &= -1, \end{aligned}$$

dok za $x > 0$ imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(0+x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|0+x| - |0|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nema prvi izvod u tački 0, i pored toga što je neprekidna u toj tački. Dodajmo da ova funkcija f ima izvod u svakoj tački $x \neq 0$ (proveriti!), i njena izvodna funkcija je jednaka $f'(x) = -1$ za $x < 0$, odnosno $f'(x) = 1$ za $x > 0$. U tački 0 funkcija f' nije definisana (tj. skup A_1 iz definicije 4.2 je skup $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

4.2 Geometrijsko tumačenje izvoda i priraštaja funkcije

Neka funkcija $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a, b)$. Označimo tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $Q(x_0 + x, f(x_0 + x))$ (videti sl. 4.2). Koficijent pravca sečice s koja prolazi kroz tačke P i Q dat je sa

$$\text{tg} = \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = \frac{y}{x},$$

gde je ugao između prave s i pozitivnog smera x -ose. Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 , tada se tačka Q približava tački P po datoj krivoj kada $x \rightarrow 0$, tj. kada se tačka $x_0 + x$ približava tački x_0 ostajući na x -osi.

Slika 4.2.

U graničnom slučaju, tačka Q se poklapa sa P , pa prava s postaje tangenta t grafika funkcije f u tački P . Koficijent pravca tangente t u tački x_0 jednak je prvom izvodu funkcije f u tački x_0 :

$$k = \text{tg} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} = f'(x_0). \quad (4.5)$$

Primer 4.9. Odredićemo ugao koji zaklapa tangenta grafika funkcije $y = x^2 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, sa pozitivnim smerom x -ose u tački

a) $x = 0$; b) $x = 1$; c) $x = 1/2$.

Kako je $y' = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, to je

a) $y'(0) = -1 = \text{tg} \alpha$, odakle je $\alpha = 3\pi/4$;

b) $y'(1) = 1 = \text{tg} \alpha$, odakle je $\alpha = \pi/4$;

c) $y'(1/2) = 0 = \text{tg} \alpha$, odakle je $\alpha = 0$ (tj. tangenta date krive u tački $x = 1/2$ je paralelna sa x -osom).

Prava

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad (4.6)$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, je *tangenta grafika funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$* . Ako je još zadovoljen uslov $f'(x_0) \neq 0$, prava

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (4.7)$$

je *normala grafika funkcije f u tački $P(x_0, f(x_0))$* .

Primer 4.10. Jednačine tangente i normale grafika funkcije $y = x^3 - 2x^2 + 2$ u tački $(2, 2)$ odredićemo na sledeći način.

Prvi izvod date funkcije je $y' = 3x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, pa je $y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$.

Prema geometrijskom tumačenju izvoda, broj $y'(2)$ predstavlja koeficijent pravca tangente na datu krivu u tački $(2, 2)$. Prema tome, ako je jednačina tražene tangente oblika $y = kx + n$, tada je $k = 4$.

Slobodan član n se određuje iz uslova da tačka $(2, 2)$ pripada tangenti. Iz $2 = 4 \cdot 2 + n$ sledi da je $n = -6$, pa je jednačina tražene tangente $y = 4x - 6$.

Ako je jednačina normale oblika $y = k_1x + n_1$, tada uslov da su normala i tangenta grafika u istoj tački međusobno normalne prave povlači $k_1 = -1/k$, gde je k koeficijent pravca tangente kroz tačku $(2, 2)$. Pošto je $k = 4$, to je $k_1 = -1/4$, pa je jednačina normale $y = -\frac{1}{4}x + n_1$. Uslov da tačka $(2, 2)$ pripada normali daje $2 = -\frac{1}{4} \cdot 2 + n_1$, tj. $n_1 = 5/2$, pa je jednačina tražene normale $4y + x = 10$.

Primer 4.11. Odredićemo jednačine tangente i normale za funkciju $y = \sqrt{x}$ u tački $(4, 2)$.

Iz $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sledi $y'(4) = \frac{1}{4}$, pa je jednačina tangente oblika $y = \frac{1}{4}x + n$. Uslov $y(4) = 2$ daje $2 = 1 + n$, pa je tražena jednačina tangente $4y - x = 4$.

Jednačina normale je $y = -4x + n_1$, pa iz uslova $2 = -4 \cdot 4 + n_1$, sledi da je jednačina tražene normale $y + 4x = 18$.

Primer 4.12. Odredićemo parametar k tako da prava $y = kx + 1$ bude tangenta krive $y^2 = 4x$, i odrediti tačku (ili tačke) dodira.

Datu krivu možemo zapisati kao $y(x) = \pm 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Označimo sa $T(x_0, y(x_0))$ tačku u kojoj tangenta dodiruje datu parabolu. Tada je

$$k = y'(x_0) = \pm \frac{1}{\sqrt{x_0}} \quad \text{i} \quad y(x_0) = \pm 2\sqrt{x_0}.$$

Prema tome se ordinata tačke dodira nalazi iz $y(x_0) = y'(x_0)x_0 + 1$, tj.

$$\pm 2\sqrt{x_0} = \pm \frac{1}{\sqrt{x_0}}x_0 + 1.$$

Uzimanjem pozitivnog predznaka u zadnjoj jednakosti dobija se $x_0 = 1$ i tačka dodira je $T(1, 2)$. Jednačina tangente u toj tački je $y = x + 1$.

Dobijena tangenta je i *jedina* sa datom osobinom (tj. da je njena jednačina oblika $y = kx + 1$), jer se iz jednačine

$$-2\sqrt{x_0} = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}x_0 + 1,$$

dobija $\sqrt{x_0} = -1$, što je kontradikcija.

4.3 Izvod zbira, proizvoda i količnika funkcija

Teorema 4.2. *Ako su funkcije f i g definisane na intervalu (a, b) i imaju prve izvode u tački $x \in (a, b)$, tada njihov zbir, razlika, proizvod i količnik takođe imaju prvi izvod u tački $x \in (a, b)$; u slučaju količnika mora se dodatno pretpostaviti da je $g(x) \neq 0$. Važe sledeća pravila za*

a) izvod zbira, odnosno razlike funkcija:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

b) izvod proizvoda funkcija:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

c) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$, gde je $C \in \mathbb{R}$ konstanta;

d) izvod količnika funkcija:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0.$$

Dokaz.

a) Ako je $z(x) = f(x) + g(x)$, tada imamo

$$z'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{z(x + \Delta x) - z(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

b) Ako stavimo $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, tada imamo

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \mp f(x+h) \cdot g(x) \mp f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}$$

Koristili smo da je, na osnovu neprekidnosti funkcije f , $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$.

c) Sledi iz b) i $C' = 0$, ako je C konstanta.

d) Ako stavimo $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, tada je

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h)g(x) \cdot h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) \pm g(x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} \\
&= \frac{1}{g^2(x)} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Napomena. Iz a) i c) sledi da ako su f i g diferencijabilne funkcije u tački x , a A i B realne konstante, tada je

$$(Af(x) + Bg(x))' = Af'(x) + Bg'(x),$$

tj. izvod je linearna operacija.

Primer 4.13. Izvod funkcije $f(x) = x^7 - 4x^2$ je, na osnovu teoreme 4.2) pod a) i c), jednak

$$f'(x) = (x^7 - 4x^2)' = (x^7)' - (4x^2)' = 7x^6 - 4(x^2)' = 7x^6 - 8x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Očividno je da pravilo pod a) iz teoreme 4.2 važi i za zbir konačnog broja diferencijabilnih funkcija:

$$(f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_n'(x). \quad (4.8)$$

Primer 4.14. Za funkciju $f(x) = \sin x + x^3 + \ln x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, prvi izvod je, na osnovu (4.8), jednak

$$f'(x) = (\sin x + x^3 + \ln x)' = (\sin x)' + (x^3)' + (\ln x)' = \cos x + 3x^2 + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Primer 4.15. Za polinom stepena n ,

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

gde su $a_n \neq 0$, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 date realne konstante, je na osnovu (4.8) jednak za $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' \\ &= (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \dots + (a_1 x)' + (a_0)' \\ &= a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1. \end{aligned}$$

Primer 4.16. Izvod funkcije $f(x) = (\sqrt{x} + 2x) \left(\sin x + \cos x + \frac{\log_3 x}{8} \right)$ je za $x > 0$ je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \right) \left(\sin x + \cos x + \frac{\log_3 x}{8} \right) \\ &\quad + (\sqrt{x} + 2x) \left(\cos x - \sin x - \frac{1}{(8 \ln 3)x} \right). \end{aligned}$$

Pravilo pod b) iz teoreme 4.2 se uopštava i na proizvod od konačnog broja diferencijabilnih funkcija:

$$\begin{aligned} (f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x))' &= f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) f_3(x) \cdots f_n(x) + \\ &\quad \cdots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_{n-1}(x) \cdot f_n'(x). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Primer 4.17. Izvod funkcije $f(x) = x^3 e^x \cos x$ je na osnovu jednakosti (4.9) jednak

$$f'(x) = (x^3 e^x \cos x)' = 3x^2 e^x \cos x + x^3 e^x \cos x - x^3 e^x \sin x.$$

Primer 4.18. Izvod racionalne funkcije $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ za $x \in \mathbb{R}$ je

$$f'(x) = \frac{(4x - 3)(x^2 + 1) - (2x^2 - 3x + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

Primer 4.19. Odredićemo izvode funkcija **a)** $f(x) = \operatorname{tg} x$ i **b)** $g(x) = \operatorname{ctg} x$, korišćenjem formule za izvod količnika dve funkcije (teorema (4.2) pod d)).

a) Kako je

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

to je

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) Kako je

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

to je

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Primer 4.20. Izvod funkcije

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, \quad x \neq \frac{4k-1}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}:$$

je jednak

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{1 + 2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{2}{1 + \sin(2x)}. \end{aligned}$$

4.4 Izvod inverzne funkcije

Teorema 4.3. *Neka je funkcija f definisana na otvorenom intervalu koji sadrži tačku x_0 u kojoj je f neprekidna funkcija i neka nad tim intervalom za f postoji njena inverzna funkcija f^{-1} koja ima izvod u tački $y_0 = f(x_0)$, tako da je $(f^{-1})'(y_0) \neq 0$. Tada postoji izvod $f'(x_0)$ i važi*

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}. \quad (4.10)$$

Dokaz. Na osnovu neprekidnosti funkcije f u tački x_0 sledi

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (f(x_0 + x) - f(x_0)) = 0.$$

Na osnovu jednakosti $y = f(x_0 + x) - f(x_0)$ sledi $y_0 + y = f(x_0 + x)$ i

$$f^{-1}(y_0 + y) = f^{-1}(f(x_0 + x)) = x_0 + x.$$

Prema uslovu teoreme je $f^{-1}(y_0) = x_0$. Zato je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_0 + y - y_0}{x_0 + x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{f^{-1}(y_0 + y) - f^{-1}(y_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y_0 + y) - f^{-1}(y_0)}{y}} \\ &= \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}. \end{aligned}$$

To znači da postoji $f'(x_0)$ i da je $f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)}$. □

Primer 4.21. Odredićemo izvod funkcije $f(x) = \ln x$, $x > 0$, korišćenjem teoreme 4.3.

Neka je $x_0 > 0$ i neka je $y_0 = f(x_0) = \ln x_0$, tj. $x_0 = e^{y_0}$. Pošto je funkcija $f^{-1}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, inverzna funkcija za datu funkciju $f(x) = \ln x$, $x > 0$, to iz primera 4.7 pod h) i relacije (4.10) sledi:

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'(y_0)} = \frac{1}{(e^{y_0})'} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0},$$

što se, naravno, poklapa sa jednakosti iz primera 4.7 pod j).

Primer 4.22. Izvodi inverznih funkcija za trigonometrijske funkcije su:

$$\begin{aligned} \text{a) } (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1; & \text{b) } (\arccos x)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1; \\ \text{c) } (\arctg x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}; & \text{d) } (\text{arcctg } x)' &= \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dokazaćemo samo jednakosti pod a) i c).

a) Inverzna funkcije $f(x) = \arcsin x$, $|x| < 1$ je $x = f^{-1}(y) = \sin y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, čiji je izvod, kako smo videli u primeru 4.7 pod c) jednak

$$(f^{-1})'(y) = (\sin y)' = \cos y.$$

Zato iz teoreme 4.3 sledi

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

c) Inverzna funkcija za datu funkciju $f(x) = \arctg x$, $x \in \mathbb{R}$, je $x = f^{-1}(y) = \text{tg } y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$, čiji je izvod, kako smo videli u primeru 4.19 pod a) jednak

$$(f^{-1})'(y) = (\text{tg } y)' = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

Zato iz teoreme 4.3 sledi

$$f'(x) = (\arctg x)' = \frac{1}{(\text{tg } y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.5 Izvod složene funkcije

Teorema 4.4. Neka funkcija $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ ima izvod u tački $x_0 \in (a, b)$ i neka funkcija $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ima izvod u tački $f(x_0) \in (c, d)$. Tada složena funkcija

$$h = g \circ f, \quad h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R},$$

ima izvod u x_0 i važi

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dokaz. Prema pretpostavci, funkcija f ima izvod u tački x_0 , te je po definiciji izvoda

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x},$$

a na osnovu neprekidnosti funkcije f u tački x_0 je

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x_0 + x) - f(x_0)) = 0.$$

Dakle, ako je $f(x_0 + x) - f(x_0) = u$, odnosno $f(x_0 + x) = f(x_0) + u$, tada $u \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow 0$.

Ako je $f(x) = k$ u okolini tačke x_0 , tj. ako je f funkcija konstanta, tada je i $h(x) = g(k)$ u okolini tačke x_0 funkcija konstanta, pa je trivijalno

$$h'(x_0) = 0 = g(k) \cdot f'(x_0) = 0 \cdot 0.$$

Pretpostavimo da f nije funkcija konstanta u okolini tačke x_0 . Za x dovoljno malo, uvek je $f(x_0 + x) - f(x_0) \neq 0$, i tada važi

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x_0 + x) - h(x_0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + x)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + u) - g(f(x_0))}{u} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x} \\ &= g'(f(x_0))f'(x_0). \quad \square \end{aligned}$$

Primer 4.23. Odredimo izvod za funkciju $h(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. Neka je $u = f(x) = \sin x$ i $g(u) = u^2$. Tada je $h = g \circ f$, tj.

$$h(x) = g(f(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na osnovu teoreme 4.4 imamo

$$h'(x) = (\sin^2 x)' = (u^2)' \cdot (\sin x)' = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primer 4.24. Odredimo izvod za funkciju $k(x) = \sin(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Neka je $u = f(x) = x^2$ i $g(u) = \sin u$. Tada je $k = g \circ f$. Na osnovu teoreme 4.4 imamo

$$k'(x) = (\sin(x^2))' = (\sin u)' \cdot (x^2)' = \cos u \cdot (2x) = 2x \cos(x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Uporediti dobijeni izvod sa onim iz prethodnog primera 4.23!

Primer 4.25. Odredimo izvod za funkciju $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Neka je $u = f(x) = x^2 - 2x$ i $g(u) = \sqrt{u}$. Tada na osnovu teoreme 4.4 imamo

$$y = (\sqrt{x^2 - 2x})' = (\sqrt{u})'(x^2 - 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x - 2) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Primer 4.26. Odredimo izvod za funkciju $y = \ln(2x^2 + 5)$. Neka je $u = f(x) = 2x^2 + 5$ i $g(u) = \ln u$. Tada na osnovu teoreme 4.4 imamo

$$y = (\ln(2x^2 + 5))' = (\ln u)'(2x^2 + 5)' = \frac{1}{u}4x = \frac{4x}{2x^2 + 5}.$$

Primer 4.27. Pokažimo da je izvod opšte stepene funkcije $f(x) = x^a$, $x > 0$, za proizvoljno $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dat sa

$$(x^a)' = a x^{a-1}, \quad x > 0.$$

Uporediti sa primerima 4.7 a) (za $a = n$, $n \in \mathbb{N}$), 4.7 b) (za $a = -n$, $n \in \mathbb{N}$) i 4.5 (za $a = 1/2$). U stvari, ako stavimo $x = e^{\ln x}$, $x > 0$, tada je

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

Primer 4.28. Odredimo izvod složene funkcije $h(x) = \sqrt[3]{5x^2 - x - 3}$. Ako stavimo $f(x) = 5x^2 - x - 3$, tada je $f'(x) = 10x - 1$, što daje

$$h'(x) = \frac{1}{3} f(x)^{-2/3} \cdot f'(x) = \frac{10x - 1}{3 \sqrt[3]{(5x^2 - x - 3)^2}}, \quad x \neq \frac{1}{10} \pm \frac{1}{10} \sqrt{61}.$$

Primer 4.29. Odredimo izvod složene funkcije $f(x) = (3x - 1)^6 \sqrt{2x - 5}$, $x > \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \cdot 3 \cdot (3x - 1)^5 \cdot \sqrt{2x - 5} + (3x - 1)^6 \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x - 5}} \\ &= 18(3x - 1)^5 \cdot \sqrt{2x - 5} + (3x - 1)^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x - 5}} \\ &= \frac{(3x - 1)^6 + 18(3x - 1)^5 \cdot (2x - 5)}{\sqrt{2x - 5}} = \frac{(3x - 1)^5 \cdot (39x - 91)}{\sqrt{2x - 5}}. \end{aligned}$$

Primer 4.30. Odredićemo izvod funkcije $f(x) = x^x$.

Datu funkciju možemo zapisati u obliku $y = e^{x \ln x}$, čiji je prvi izvod

$$y' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1), \quad x > 0.$$

Napomena. Prethodno rezonovanje se može upotrebiti kod određivanja izvoda funkcije $s(x)^{r(x)}$, gde su s i r diferencijabilne funkcije i $s(x) > 0$. Kako je

$$s(x)^{r(x)} = e^{r(x)\ln s(x)}$$

to imamo

$$\begin{aligned} (s(x)^{r(x)})' &= (e^{r(x)\ln s(x)})' = e^{r(x)\ln s(x)}(r(x)\ln(s(x)))' \\ &= s(x)^{r(x)} \left(r'(x)\ln(s(x)) + r(x)\frac{s'(x)}{s(x)} \right), \end{aligned}$$

jer je $(\ln(s(x)))' = \frac{s'(x)}{s(x)}$.

Primer 4.31. Odredićemo izvod funkcije $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Na osnovu jednakosti $y = e^{\sqrt{x}\ln x}$, $x > 0$, sledi

$$y' = e^{\sqrt{x}\ln x} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

4.6 Tablica prvih izvoda

U sledećoj tablici navodimo prve izvode najčešće korišćenih elementarnih funkcija, kao i skupove na kojima ti prvi izvodi postoje.

1. $C' = 0$, gde je C konstanta;
2. $(x)^{-1}' = -x^{-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x > 0$;
3. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$;
8. $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;
10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
12. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Korišćenjem gornje tablice, uz pravila za izvod zbira, proizvoda i količnika funkcija, kao i pravila za izvod složene i inverzne funkcije, možemo odrediti izvode svih elementarnih funkcija.

Primer 4.32. Odredićemo izvode sledećih funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x};$$

$$\text{b) } f(x) = 6 \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + 2 \ln \frac{x - 1}{x + 1} + 4 \operatorname{arctg} x.$$

a) Imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{-\sin^3 x - 2 \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} + \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} = \frac{\sin^2 x + 1 + \cos^2 x}{\sin^3 x} \\ &= \frac{2}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

b) Imamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} + 2 \frac{x + 1}{x - 1} \frac{2}{(x + 1)^2} + 4 \frac{1}{1 + x^2} \\ &= 6 \frac{-4x}{x^4 - 1} + 4 \frac{1}{x^2 - 1} + 4 \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{-24x + 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4}{x^4 - 1} \\ &= \frac{8x^2 - 24x}{x^4 - 1}. \end{aligned}$$

4.7 Prvi izvod funkcije date u parametarskom obliku

Funkcija $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, je data u parametarskom obliku ako je

$$x = (t), \quad y = (t), \quad t \in (,), \quad (4.11)$$

pri čemu je monotona funkcija.

Teorema 4.5. Neka su i diferencijabilne funkcije na intervalu $(,)$ i neka je $t' \neq 0$, $t \in (,)$. Tada se prvi izvod funkcije $y = f(x)$ date u parametarskom obliku (relacija (4.11)) određuje po formuli

$$f'(x) = \frac{f'}{t}, \quad \text{ili} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Primer 4.33. Odredićemo prvi izvod sledećih funkcija datih u parametarskom obliku:

a) $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t), \quad t \in (0, 2\pi);$

b) $x = 2 \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in (0, \pi/2).$

a) Kako je $x'_t = 2(1 - \cos t), y'_t = 2 \sin t$, to je

$$y' = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)}, \quad t \in (0, 2\pi).$$

b) Kako je $x'_t = 6 \cos^2 t(-\sin t), y'_t = 3 \sin^2 t \cos t$, to je

$$y' = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-6 \cos^2 t \sin t} = -\frac{1}{2 \operatorname{ctg} t}, \quad t \in (0, \pi/2).$$

4.8 Diferencijal funkcije

Neka je data funkcija $y = f(x)$ na intervalu (a, b) , tačka $x_0 \in (a, b)$ i, kao u poglavlju 4.1, stavimo $\Delta x = x - x_0$ za $x \in (a, b)$ (priraštaj nezavisno promenljive). Prema definiciji 4.1 prvog izvoda, funkcija f ima prvi izvod u tački x_0 ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0), \quad (4.12)$$

gde je $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ priraštaj funkcije. Ako uvedemo oznaku

$$r(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0),$$

onda iz (4.12) dobijamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} r(\Delta x) = 0. \quad (4.13)$$

Iz jednakosti

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + r(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (4.14)$$

i granične vrednosti (4.13) sledi približna formula

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x, \quad \text{ako } \Delta x \approx 0. \quad (4.15)$$

Primer 4.34. Ako je $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, onda je za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{R}$

$$y = (x_0 + x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot x + x^2 = f'(x_0) \cdot x + r(x) \cdot x,$$

tj. $r(x) = x$.

Približna formula (4.15) za $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, ima oblik

$$y \approx 2x_0 \cdot x, \quad \text{ako } x \approx 0.$$

Primer 4.35. Ako je $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, onda je za proizvoljno $x_0 \in \mathbb{R}$

$$y = (x_0 + x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot x + 3x_0 \cdot x^2 + x^3 = f'(x_0) \cdot x + r(x) \cdot x.$$

Tako dobijamo da je funkcija $r = r(x)$ iz (4.14) jednaka

$$r(x) = 3x_0 \cdot x + x^2.$$

Približna formula (4.15) za $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, ima oblik

$$y \approx 3x_0^2 \cdot x, \quad \text{ako } x \approx 0.$$

Prethodna razmatranja nas dovode do sledeće definicije.

Definicija 4.3. Funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački x_0 ako se njen priraštaj y u x_0 može napisati u obliku

$$y = f(x) - f(x_0) = D \cdot x + r(x) \cdot x, \quad (4.16)$$

gde je D realan broj koji zavisi samo od x_0 , a r zadovoljava uslov (4.13).

Tada se funkcija priraštaja

$$L(x) = D \cdot x \quad (4.17)$$

naziva diferencijal funkcije f u tački x_0 i obeležava se sa dy , tj.

$$dy = D \cdot x.$$

Funkcija je diferencijabilna na skupu $A_1 \subset (a, b)$ ako je diferencijabilna u svakoj tački tog skupa.

Posebno je za $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, pa (4.16) postaje

$$y = (x_0 + x) - x_0 = x = 1 \cdot x + 0 \cdot x.$$

Dakle, za ovu funkciju je $D = 1$ za svako x_0 , dok je $r(x) \equiv 0$.

Imajući u vidu da za funkciju $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, važi

$$y = f'(x_0) \cdot x = 1 \cdot x = x$$

tj. diferencijal dx je jednak sa x . Zbog toga ćemo u daljem radu diferencijal iz (4.17) pisati u obliku

$$dy = D \cdot dx. \quad (4.18)$$

Odnos diferencijabilnih i funkcija koje imaju prvi izvod u nekoj tački je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 4.6. *Funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački x_0 ako i samo ako ima izvod u toj tački. Tada je*

$$dy = f'(x_0) dx.$$

Dokaz. Ako f ima izvod u tački x_0 , onda iz (4.12) i (4.13) sledi postojanje broja $D = f'(x_0)$ iz (4.16), što znači da je f diferencijabilna u x_0 .

Ako je f diferencijabilna u tački x_0 , tada deleći (4.16) sa x dobijamo

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x} = D + r(x).$$

Puštajući da $x \rightarrow 0$, korišćenjem relacije (4.13) sledi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = D + \lim_{x \rightarrow 0} r(x) = D. \quad (4.19)$$

tj. f ima prvi izvod $f'(x_0)$ u tački x_0 , i on je jednak broju D iz (4.16).

Na osnovu (4.18), sada se f' može napisati u obliku $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. \square

Neka funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a, b)$. Označimo tačke $P(x_0, f(x_0))$ i $Q(x_0 + x, f(x_0 + x))$ (videti sl. 4.3).

Neka je S tačka preseka tangente u tački P sa ordinatom u tački $x_0 + x$ na x -osi, a T podnožje normale iz tačke P na ordinatu SQ . Tada je $\overline{TQ} = f(x_0 + x) - f(x_0) = y$ priraštaj funkcije f u tački x_0 , dok je $\overline{TS} = f'(x_0) x$ vrednost diferencijala funkcije f u tački x_0 koja odgovara priraštaju x . Dužina duži \overline{ST} je vrednost diferencijala funkcije f u tački x_0 za priraštaj $dx = x$, i jednaka je priraštaju na tangenti, tj. veličini $dy = f'(x_0) dx$.

Duži \overline{TQ} i \overline{TS} su približno jednake, ako je priraštaj x mali.

Primer 4.36. Posmatraćemo funkciju $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Njen priraštaj u tački x je

$$\begin{aligned} y &= f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 1 - 2x^2 - 3x + 1 \\ &= 4x \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 \Delta x = (4x + 3) \Delta x + 2(\Delta x)^2 = f'(x) \Delta x + 2(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Približna vrednost funkcije f u tački $1, 1$ određuje se na sledeći način:

Za $x_0 = 1$, $\Delta x = 0, 1$, i $f(1) = 4$, na osnovu relacije (4.15) imamo

$$\begin{aligned} y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(1) \cdot \Delta x, \\ f(1, 1) &\approx f(1) + f'(1) \Delta x = 4 + 7 \cdot 0, 1 = 4, 7. \end{aligned}$$

Inače, tačna vrednost je $f(1, 1) = 4, 72$.

Diferencijal dy date funkcije f je $dy = (4x + 3) dx$.

Primer 4.37. Koristeći približnu formulu (videti (4.15))

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x, \quad \text{kada } \Delta x \approx 0.$$

odredićemo približne vrednosti brojeva: $A = \sqrt{4, 0003}$ i $B = \ln(1, 001)$.

Za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, prvi izvod je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, te za $x = 4$ i $\Delta x = 0, 0003$ imamo:

$$A = \sqrt{4, 0003} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} 0, 0003 = 2 + \frac{0, 0003}{4} = 2, 000075.$$

Ako stavimo $\Delta x = 0, 001$ i $x = 1$ tada je

$$B = \ln(1, 001) \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0, 001 = 0, 001.$$

4.9 Izvodi višeg reda

Pretpostavimo da funkcija f ima prvi izvod $f'(x)$ u svakoj tački intervala (a, b) . Kako smo videli u definiciji 4.2, time je na (a, b) definisana izvodna funkcija f' funkcije f . Ako postoji prvi izvod funkcije f' u tački $x_0 \in (a, b)$:

$$(f')'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \quad (4.20)$$

tada se granična vrednost u (4.20) naziva se *drugi izvod funkcije f u tački x₀* i obeležava se sa $f''(x_0)$. Po definiciji je za $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x}. \quad (4.21)$$

Uopšte, važi

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad x \in (a, b),$$

ako izvod na desnoj strani gornje jednakosti postoji.

Primer 4.38. Za funkciju $f(x) = 4x^2 - 2x + 5 - \frac{3}{x}$, prvi izvod je funkcija f' data sa $f'(x) = 8x - 2 + 3x^{-2}$, $x \neq 0$, a drugi izvod je jednak $f''(x) = (f'(x))' = 8 - 6x^{-3}$, $x \neq 0$.

Dalje je $f'''(x) = 18x^{-4}$ i $f^{(4)}(x) = -72x^{-5}$, $x \neq 0$.

Primer 4.39. Za funkciju $f(x) = \sqrt{3-5x}$, $x < 3/5$ odredićemo f' , f'' , f''' :

$$f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{3-5x}}, \quad f''(x) = \frac{-25}{4\sqrt{(3-5x)^3}}, \quad f'''(x) = \frac{-375}{8\sqrt{(3-5x)^5}}.$$

Primer 4.40. Za polinom n -tog stepena

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a_n \neq 0), \quad (4.22)$$

važi (proveriti):

$$P_n^{(j)}(0) = a_j \cdot j!, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (4.23)$$

Dakle, polinom P_n (4.22) možemo pisati u obliku

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{P_n^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots + \frac{P_n'(0)}{1!} x + \frac{P_n(0)}{0!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Naravno, ako je $j > n$, tada za sve $x \in \mathbb{R}$ važi $P_n^{(j)}(x) = 0$.

Po definiciji je $f^{(0)} = f$ za proizvoljnu funkciju f .

Primer 4.41. Naćićemo $f^{(n)}(x)$ za $n \in \mathbb{N}$, ako je

a) $f(x) = e^x$; **b)** $f(x) = a^x$, $a > 0$.

a) Za $x \in \mathbb{R}$ je $f'(x) = e^x$ i $f''(x) = e^x$. Ako za neko $n \in \mathbb{N}$ važi $f^{(n)}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, tada diferenciranjem ove jednakosti sledi

$$\left(f^{(n)}(x)\right)' = (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije sledi da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Za $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, važi:

$$f'(x) = a^x \ln a, \quad f''(x) = a^x \ln^2 a, \dots, \quad f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a.$$

Primer 4.42. Naćićemo $f^{(j)}(x)$ za $j \in \mathbb{N}$, ako je

a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \cos x$.

a) Imamo za $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x,$$

pa uopšte za $j \in \mathbb{N}$ važi:

$$f^{(4j)}(x) = \sin x, \quad f^{(4j+1)}(x) = \cos x, \quad f^{(4j+2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4j+3)}(x) = -\cos x.$$

Ove formule se mogu napisati u jedinstvenom obliku

$$\sin^{(j)} x = \sin \left(x + \frac{j}{2} \right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Analogno slučaju pod a), imamo za $j \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(4j)}(x) = \cos x, \quad f^{(4j+1)}(x) = -\sin x, \quad f^{(4j+2)}(x) = -\cos x, \quad f^{(4j+3)}(x) = \sin x,$$

te je

$$\cos^{(j)}(x) = \cos \left(x + \frac{j}{2} \right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lajbnicova formula

Lajbnicova formula daje n -ti izvod proizvoda dve funkcije.

Teorema 4.7. (Lajbnicova formula.) *Pretpostavimo da su funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ n puta diferencijabilne na intervalu (a, b) , gde $n \in \mathbb{N}$. Ako koristimo uobičajenu konvenciju $u^{(0)}(x) = u(x)$, onda važi sledeća jednakost:*

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} u^{(j)}(x) v^{(n-j)}(x), \quad x \in (a, b). \quad (4.25)$$

Dokaz. Za $n = 1$ dobija se poznata relacija za izvod proizvoda dve funkcije. Neka je relacija (4.25) tačna za $n = k$. Tada za $n = k + 1$ i $x \in (a, b)$ važi

$$\begin{aligned}
 (u(x) \cdot v(x))^{(k+1)} &= \left((u(x) \cdot v(x))^{(k)} \right)' = \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j)}(x) v^{(k-j)}(x) \right)' \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j+1)}(x) v^{(k-j)}(x) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(j)}(x) v^{(k-j+1)}(x) \\
 &= \binom{k}{0} u'(x) v^{(k)}(x) + \binom{k}{1} u''(x) v^{(k-1)}(x) + \dots + \binom{k}{k-1} u^{(k)}(x) v'(x) \\
 &\quad + \binom{k}{k} u^{(k+1)}(x) v(x) + \binom{k}{0} u(x) v^{(k+1)}(x) + \binom{k}{1} u'(x) v^{(k)}(x) + \dots \\
 &\quad + \binom{k}{k-1} u^{(k-1)}(x) v''(x) + \binom{k}{k} u^{(k)}(x) v'(x) \\
 &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} u^{(j)}(x) v^{(k+1-j)}(x),
 \end{aligned}$$

Na osnovu principa matematičke indukcije, sada sledi da je formula (4.25) tačna za sve $n \in \mathbb{N}$. \square

Primer 4.43. Odredićemo $f^{(n)}(x)$ ako je $f(x) = x^2 \sin x$ za $n \in \mathbb{N}$.

Na osnovu Lajbnicove formule (4.25) imamo

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(x) &= x^2 \sin^{(n)} x + 2x \binom{n}{1} \sin^{(n-1)} x + 2 \binom{n}{2} \sin^{(n-2)} x \\
 &= x^2 \sin \left(x + \frac{n}{2} \right) + 2nx \sin \left(x + \frac{(n-1)}{2} \right) + \left(-n(n-1) \sin \left(x + \frac{n}{2} \right) \right) \\
 &= (x^2 - n(n-1)) \sin \left(x + \frac{n}{2} \right) - 2nx \cos \left(x + \frac{n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Primer 4.44. Odredimo n -te izvode sledećih funkcija:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, $x \notin \{1, 2\}$;

b) $f(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

a) Data funkcija se može zapisati kao

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}, \quad x \notin \{1, 2\},$$

pa je $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$.

b) Iz jednakosti $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$, sledi

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\right).$$

4.10 Lagranžova teorema srednje vrednosti i primene

Sledeća teorema povezuje postojanje ekstremne vrednosti funkcije u nekoj tački sa postojanjem i vrednosti prvog izvoda u toj tački.

Teorema 4.8. *Ako je funkcija f neprekidna na intervalu (a, b) i ima lokalnu ekstremnu vrednost (tj. lokalni minimum ili lokalni maksimum) u tački c , $c \in (a, b)$, tada je ili $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji.*

Dokaz. Pretpostavimo da funkcija f ima u tački c ekstremnu vrednost. Ako $f'(c)$ ne postoji, tada nema šta da se dokazuje. Ako $f'(c)$ postoji, onda treba da pokažemo da je $f'(c) = 0$.

Neka je, suprotno tvrđenju teoreme, $f'(c) > 0$. Iz definicije prvog izvoda sledi da postoji interval $(c - \delta, c + \delta) \subset (a, b)$, takav da važi

$$\frac{f(c + x) - f(c)}{x} > 0 \quad \text{za sve } 0 < |x| < \delta.$$

To znači da je $f(c + x) > f(c)$ za $x > 0$, odnosno $f(c + x) < f(c)$ za $x < 0$. Prema tome $f(c)$ nije ni najveća vrednost (maksimum) ni najmanja vrednost (minimum) na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, suprotno pretpostavci da u c funkcija f ima lokalni ekstrem.

Analogno se dobija kontradikcija i kada se pretpostavi $f'(c) < 0$, pa mora biti $f'(c) = 0$. □

Primer 4.45. Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni minimum u tački $x = 0$ i važi $f' = 2x$, $f'(0) = 0$.

Primer 4.46. Funkcija $f = |x|$ ima lokalni minimum u tački $x = 0$, ali prvi izvod u tački $x = 0$ ne postoji (primer 4.8).

Geometrijska interpretacija prethodne teoreme jeste da diferencijabilna funkcija ima horizontalnu tangentu u tački lokalnog ekstrema.

Teorema 4.9. (Rolova teorema.)¹ *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) i važi $f(a) = f(b)$, tada postoji tačka $c \in (a, b)$ za koju je $f'(c) = 0$.*

Dokaz. Ako je funkcija f konstanta, tj. $f(a) = f(x) = f(b)$, za sve $x \in (a, b)$, tada je $f'(x) = 0$ za svako $x \in (a, b)$. Kako je funkcija f neprekidna na intervalu $[a, b]$, postoje tačke c_1 i c_2 iz intervala $[a, b]$ takve da su $f(c_1)$ i $f(c_2)$ najmanja, odnosno najveća vrednost funkcije f . Moguća su dva slučaja.

I Ako se tačke c_1 i c_2 poklapaju sa krajevima intervala $[a, b]$, tada iz uslova $f(a) = f(b)$ sledi da je $f(c_1) = f(c_2)$, te je f konstantna funkcija na $[a, b]$. Tada je $f'(x) = 0$, za sve $x \in [a, b]$.

II Neka je $c_1 \in (a, b)$. Kako postoji $f'(c_1)$, prema teoremi 4.8 je $f'(c_1) = 0$. \square

Geometrijsko značenje Rolove teoreme 4.9 je da, za funkciju koja zadovoljava sva tri njena uslova, postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ u kojoj je tangenta grafika horizontalna prava (sl. 3.4).

Slika 4.4.

Slika 4.5.

Primer 4.47. Pokazaćemo da funkcija $f(x) = x(x-1)(x-2)$ zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalima $[0, 1]$ i $[1, 2]$, odnosno na intervalu $[0, 2]$, i odrediti odgovarajuće vrednosti za c .

Data funkcija je neprekidna i diferencijabilna u svakoj tački ovih intervala i važi $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, što znači da ona zadovoljava uslove Rolove teoreme na intervalima $[0, 1]$, $[1, 2]$ i $[0, 2]$.

Kako je $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$, to je $f'(x) = 0$ za $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}/3$. Dakle, tačke u kojima je prvi izvod funkcije jednak nuli su

$$c_1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, 1] \quad \text{i} \quad c_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \in [1, 2].$$

Na intervalu $[0, 2]$ izvodna funkcija f' ima dve realne nule c_1 i c_2 .

Poslednji primer pokazuje da tačka c iz Rolove teoreme nije jedinstvena. Prime-timo takođe da Rolova teorema daje samo postojanje tačke c u kojoj je prvi izvod jednak nuli, ali ne i njenu konstrukciju.

Teorema 4.10. (Lagranžova teorema.)² *Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) , tada postoji tačka*

¹M. Rolle (1652–1719)

²J. L. Lagrange (1736–1813)

$c \in (a, b)$, takva da važi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dokaz. Funkcija

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \quad x \in [a, b],$$

zadovoljava uslove Rolove teoreme. Naime, funkcija F je neprekidna na intervalu $[a, b]$, diferencijabilna na intervalu (a, b) i $F(a) = F(b) = 0$.

Prvi izvod funkcije F je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Na osnovu Rolove teoreme 4.9 postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $F'(c) = 0$, tj.

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Geometrijsko značenje Lagranžove teorema 4.10 je da, za funkciju f koja zadovoljava njene uslove, postoji tačka $c \in (a, b)$, u kojoj je tangenta paralelna sa sečicom koju određuju tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ slika 4.5. Naime, koeficijent pravca sečice AB je

$$\text{tg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

što je prema Lagranžovoj teoremi jednako prvom izvodu funkcije f u tački c , tj. koeficijentu pravca tangente funkcije f tački sa apscisom c .

Primer 4.48. Pokazaćemo sledeće nejednakosti:

- a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R};$
- b) $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R};$
- c) $\frac{x - y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y}, \quad 0 < y < x.$

Primenom Lagranžove teoreme 4.10 dobijamo

- a) Funkciju $f(t) = \sin t, t \in \mathbb{R}$, je neprekidna na proizvoljnom zatvorenom intervalu

$[x, y]$ i diferencijabilna na odgovarajućem otvorenom intervalu (x, y) , pa postoji tačka $c \in (x, y)$ takva da važi

$$\sin x - \sin y = (x - y) \cos c.$$

Odavde je

$$|\sin x - \sin y| = |\cos c| \cdot |x - y| \leq |x - y|.$$

b) Za funkciju $f(t) = \arctg t$, $t \in \mathbb{R}$, koja je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[x, y]$, postoji tačka $c \in (x, y)$ sa osobinom

$$\arctg x - \arctg y = \frac{x - y}{1 + c^2}.$$

Odavde je

$$|\arctg x - \arctg y| = \frac{|x - y|}{1 + c^2} \leq |x - y|.$$

c) Za funkciju $f(t) = \ln t$, $t > 0$, koja je neprekidna na $[y, x]$ i diferencijabilna na (y, x) , $0 < y < x$, postoji tačka $c \in (y, x)$ sa osobinom

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y} = \frac{x - y}{c}.$$

Odavde je

$$|\ln x - \ln y| = \frac{|x - y|}{c}.$$

Kako je $\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{y}$, to važi

$$\frac{x - y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x - y}{y}.$$

Na osnovu Lagranžove teoreme možemo dokazati sledeće teoreme.

Teorema 4.11. *Diferencijabilna funkcija f je konstanta na intervalu $[a, b]$ ako i samo ako je njen prvi izvod f' jednak nuli u svakoj tački otvorenog intervala (a, b) .*

Dokaz. Da je uslov potreban sledi iz činjenice da ako je diferencijabilna funkcija konstanta na intervalu $[a, b]$, onda je njen prvi izvod jednak nuli na intervalu (a, b) .

Pokažimo da je uslov i dovoljan. U tom cilju, pretpostavimo da je $f'(x) = 0$ za sve $x \in (a, b)$ i neka su x_1 i x_2 dve proizvoljne tačke intervala (a, b) . Iz Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $c \in (x_1, x_2)$, dakle $c \in (a, b)$, takva da je

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2). \quad (4.26)$$

Na osnovu pretpostavke da je $f'(x) = 0$ za sve $x \in (a, b)$, iz prethodne relacije (4.26) dobijamo $f(x_1) = f(x_2)$. Kako je par x_1, x_2 bio proizvoljno izabran, to je funkcija f konstanta na intervalu (a, b) . \square

Korišćenjem prethodne teoreme dokazujemo sledeću važnu teoremu.

Teorema 4.12. *Ako su izvodi funkcija F_1 i F_2 na nekom intervalu jednaki, tj. važi*

$$F_1'(x) = F_2'(x), \quad x \in (a, b),$$

tada je razlika te dve funkcije jednaka konstanti.

Dokaz. Naime, ako je

$$f(x) = F_1(x) - F_2(x), \quad x \in (a, b),$$

tada važi $f'(x) = 0$ na intervalu (a, b) . Iz teoreme 4.11 sledi da je na tom intervalu funkcija f konstanta. \square

Teorema 4.13. *Ako je izvod funkcije f ograničen na intervalu (a, b) , tada je f uniformno neprekidna funkcija na (a, b) .*

Dokaz. Kako je funkcija f' ograničena na (a, b) , to postoji broj $M > 0$ takav da je $|f'(x)| \leq M$. Primenom Lagranžove teoreme, za svaki par tačaka $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| \leq M|x_1 - x_2|, \quad c \in (x_1, x_2).$$

Neka je $\epsilon > 0$ dato. Ako stavimo $\delta = \frac{\epsilon}{M}$, tada dobijamo

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, b)) \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

\square

Napomena. Funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov na intervalu (a, b) ako postoji konstanta $M > 0$ tako da za svaki par $x_1, x_2 \in (a, b)$ važi:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Metoda sukcesivne aproksimacije (iteracije). Lagranžova teorema o srednjoj vrednosti se može koristiti pri rešavanju jednačine $f(x) = x$ metodom *sukcesivne aproksimacije (iteracije)*.

Mnoge jednačine se, naime, mogu zapisati u obliku

$$f(x) = x. \quad (4.27)$$

Jednačine (4.27) se rešavaju "približno" tako što se, određenim postupkom, definiše niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takav da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, gde je $f(c) = c$, a zatim se određeno x_n uzima za približno rešenje jednačine (4.27). Pri tome se $n \in \mathbb{N}$ određuje tako da je za dato $\epsilon > 0$

$$|x_n - c| < \epsilon.$$

Veličina $|x_n - c|$ je *greška aproksimacije* rešenja c jednačine (4.27) n -tim članom niza $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Jedna od metoda za određivanje niza $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, čija je granica rešenje jednačine $f(x) = x$, je metoda sukcesivnih aproksimacija koja je veoma podesna za primenu na računaru.

Teorema 4.14. *Neka je $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ neprekidna funkcija nad intervalom $[a, b]$ i ima izvod u otvorenom intervalu (a, b) . Ako je*

$$|f'(x)| \leq q < 1, \quad \text{za sve } x \in (a, b), \quad (4.28)$$

tada postoji jedinstveno rešenje $x \in [a, b]$ jednačine (4.27).

Dokaz. Na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti sledi da je za sve $x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x - y|,$$

gde je $c \in (x, y)$, $x < y$. Odavde sledi

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|, \quad \text{za sve } x, y \in [a, b].$$

Definisaćemo niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iz intervala $[a, b]$ na sledeći način:

$$x_0 \in [a, b], \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Ovako definisan niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se naziva niz *sukcesivnih aproksimacija*.

Pokazaćemo da je niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentan, odnosno da je Košijev. Za svako $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q \cdot |x_n - x_{n-1}| \\ &= q|f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \leq q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \dots \leq q^n|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Sledi da je za sve $n, p \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \sum_{k=n}^{n+p-1} q^k. \quad (4.29)$$

Kako je $q < 1$, niz sa opštim članom $\sum_{k=1}^n q^k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$ je konvergentan, te je i Košijev. Tada je, na osnovu (4.29), i niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev, te je i on konvergentan.

Neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Tada iz relacije $x_{n+1} = f(x_n)$ i neprekidnosti funkcije f sledi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = c = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(c).$$

Dakle, c je rešenje jednačine (4.27). Može se pokazati da važi nejednakost

$$|x_n - c| \leq \frac{q^n}{1 - q} |x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prethodna nejednakost omogućava da odredimo x_n tako da $|x_n - c|$ bude manje od unapred datog, a inače proizvoljnog, broja ϵ i tako postignemo željenu tačnost aproksimacije rešenja.

Jedinstvenost dobijenog rešenja c jednačine $f(x) = x$ lako sledi iz nejednakosti

$$|f(u) - f(v)| \leq q|u - v|$$

koja važi za sve $u, v \in [a, b]$. Naime, ako je $u = c$ i $v = y$, gde je $y = f(y)$, dobijamo da je $|c - y| \leq q|c - y|$, što je nemoguće ako je $c \neq y$, jer je $q < 1$. \square

Primer 4.49. Naćićemo približno rešenje jednačine $xe^x - x^2 - 1 = 0$ metodom iteracije.

Data jednačina se može napisati u obliku $x = \frac{1}{e^x - x} = f(x)$. Neka je $f: [0, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{e-1}, 1\right]$.

Kako je $|f'(x)| = \frac{1}{(e^x - x)^2} (e^x - 1) \leq q < 1$ za svako $x \in (0, 1)$ to su ispunjeni uslovi za

primenu metoda iteracije. Na osnovu toga niz $x_{n+1} = \frac{1}{e^{x_n} + x_n}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju jednačine. Ako je na primer $x_0 = 1$, tada dobijamo prvih šest članova niza sukcesivnih aproksimacija. $x_1 = 0.58198$, $x_2 = 0.82809$, $x_3 = 0.68453$, $x_4 = 0.77023$, $x_5 = 0.71941$, $x_6 = 0.74973$, ...

4.11 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

Ispitivanje raščćenja i opadanja funkcije, kao i nalaženje ekstremnih vrednosti funkcije su neophodni za detaljnu analizu grafika funkcije $y = f(x)$. Ako je funkcija data nekom analitičkom formulom, pokazaćemo da upravo njeni izvodi omogućuju tu analizu.

Teorema 4.15. Neka je f diferencijabilna funkcija na intervalu (a, b) .

1) Ako je prvi izvod funkcije f pozitivan (resp. nenegativan) na intervalu (a, b) , tada je funkcija f rastuća (resp. neopadajuća) na (a, b) .

2) Ako je prvi izvod funkcije f negativan (resp. nepozitivan) na intervalu (a, b) , tada je funkcija f opadajuća (resp. nerastuća) na (a, b) .

Dokaz. Očevidno je dovoljno dokazati prvi slučaj.

Pretpostavimo da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a, b)$ (resp. $f'(x) \geq 0$) za sve $x \in (a, b)$. Ako su x_1, x_2 dve tačke iz datog intervala i $x_1 < x_2$, tada iz Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $c \in (x_1, x_2)$ takva da važi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Kako je po pretpostavci prvi izvod funkcije f pozitivan (resp. nenegativan) na intervalu (a, b) , iz zadnje relacije dobijamo

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (\text{resp. } f(x_2) - f(x_1) \geq 0).$$

To znači da je funkcija f rastuća (resp. neopadajuća) na (a, b) . □

Sledeći primer pokazuje da rastuća funkcija ne mora imati uvek pozitivan izvod.

Primer 4.50. Funkcija $f(x) = x^3$ raste na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Kako je $f'(x) = 3x^2$, to je $f'(x) > 0$ za $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $f'(0) = 0$.

U stvari, važi sledeća teorema.

Teorema 4.16. Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) .

- 1) Ako je funkcija f rastuća na intervalu $[a, b]$, tada je $f'(x) \geq 0$ za svako $x \in (a, b)$.
- 2) Ako je funkcija f opadajuća na intervalu $[a, b]$, tada je $f'(x) \leq 0$ za svako $x \in (a, b)$.

Dokaz. Dokazaćemo samo slučaj pod 1); slučaj pod 2) je potpuno analogan. Neka je x proizvoljna tačka intervala (a, b) . Pošto je prema pretpostavci funkcija f rastuća na (a, b) , to za dovoljno malo x važi

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$$

Posle primene graničnog procesa imamo

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0, \quad x \in (a, b),$$

jer po pretpostavci funkcija f ima izvod u tački x . □

Primer 4.51. Funkcija $f(x) = x^2$ na intervalu $(-\infty, 0)$ opada i $f'(x) = 2x < 0$, a na intervalu $(0, +\infty)$ raste i $f'(x) > 0$.

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ tada je *globalni maksimum* (respektivno *globalni minimum*) na tom intervalu najveća (respektivno najmanja) od vrednosti $f(a)$, $f(b)$, $f(c_i)$, $i = 1, \dots, k$, gde su c_i tačke u kojima funkcija f ima lokalne ekstreme, a k njihov broj.

Primetimo da funkcije u primerima 4.45 i 4.46 imaju u tački $x = 0$ globalni minimum (a ne samo lokalni).

Prvi kriterijum za određivanje ekstremnih vrednosti funkcije

Teorema 4.8 daje potrebne uslove za postojanje lokalnog ekstrema funkcije, ali ne i dovoljne, kao što pokazuje primer 4.50. U nastavku dajemo prvi (dovoljan) uslov za postojanje lokalne ekstremne vrednosti funkcije; drugi takav uslov ćemo dati u potpoglavlju 4.16.

Teorema 4.17. *Neka je funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) i neka je $f'(c) = 0$. Tada važi sledeće:*

1. *Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in (a, c)$, a $f'(x) < 0$ za $x \in (c, b)$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u tački c .*
2. *Ako je $f'(x) < 0$ za $x \in (a, c)$, a $f'(x) > 0$ za $x \in (c, b)$, tada funkcija f ima lokalni minimum u tački c .*
3. *Ako je $f'(x) > 0$, ili $f'(x) < 0$, za sve $x \in (a, b)$, osim možda u tački c , tada funkcija f nema ekstremne vrednosti u tački c .*

Dokaz. Ponovo je dovoljno dokazati prvi slučaj.

Na osnovu teoreme 4.15 uslov $f'(x) > 0$ za $x \in (a, c)$, povlači da funkcija f raste na intervalu (a, c) , dok uslov $f'(x) < 0$ za $x \in (c, b)$, znači da funkcija f opada na intervalu (c, b) . Prema tome je $f(c) > f(x)$, za sve $x \in (a, b)$, $x \neq c$, što znači da u tački c funkcija dostiže lokalni maksimum. \square

Primer 4.52. Odredićemo tačke u kojima sledeće funkcije imaju lokalne ekstremne vrednosti, kao i intervale na kojima one rastu, odnosno opadaju:

$$\mathbf{a)} f(x) = 2 - 4x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{b)} f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Kako je $f'(x) = -4 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, to je $f'(x) = 0$ za $x = -2$, gde funkcija f ima ekstremnu vrednost.

Za $-4 - 2x > 0$, tj. za $x < -2$, funkcija raste.

Za $-4 - 2x < 0$, tj. za $x > -2$, funkcija opada.

Prema tome, u tački $x = -2$ data funkcija ima lokalni maksimum.

b) Kako je $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{x^{2/3}}) = \frac{x^{2/3} - 1}{3x^{2/3}} = \frac{x^2 - 1}{3x^{2/3}(x^{4/3} + x^{2/3} + 1)}$,
 $x \neq 0$, to važi sledeće:

funkcija f opada za $x^2 - 1 < 0$, odnosno na intervalima $(-1, 0)$ i $(0, 1)$;

funkcija f raste na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.

Funkcija f ima lokalni maksimum u tački $x_1 = -1$, a lokalni minimum u tački $x_2 = 1$. Tačka $x_3 = 0$ nije ekstrem funkcije.

4.12 Košijeva teorema srednje vrednosti

Sledeća teorema srednje vrednosti je uopštenje Lagranžove teoreme.

Teorema 4.18. (Košijeva teorema.) *Ako su funkcije f i g neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, b]$, diferencijabilne na otvorenom intervalu (a, b) i $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada postoji tačka $c \in (a, b)$, za koju je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Ako je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, tada sledi da je funkcija g monotona na (a, b) . Ako funkcija g ne bi bila monotona, postojale bi tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$ takve da je $x_1 \neq x_2$, $g(x_1) = g(x_2)$. Na osnovu Rolove teoreme tada postoji tačka $d \in (x_1, x_2)$ takva da je $g'(d) = 0$, što je u suprotnosti sa uslovom $g'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$.

Ako je g rastuća na (a, b) , tada postoji inverzna funkcija funkcije g , $x = x(t)$, definisana i diferencijabilna na intervalu $[g(a), g(b)]$, gde je $x(g(a)) = a$ i $x(g(b)) = b$. Primećimo da je $g(a) < g(b)$.

Funkcija $f(x)$ se može prikazati kao $f(x) = f(x(t))$, $t \in [g(a), g(b)]$. Odavde sledi da je f diferencijabilna funkcija, kao kompozicija diferencijabilnih funkcija. Primenom Lagranžove teoreme (i izvoda složene funkcije) dobijamo, za neko $\bar{c} \in (g(a), g(b))$,

$$\frac{f(x(g(b))) - f(x(g(a)))}{g(b) - g(a)} = f'(x(\bar{c})) \cdot x'_t(\bar{c})$$

(x'_t označava izvod po parametru t). Iz $x'_t(\bar{c}) = \frac{1}{g'(x(\bar{c}))}$ (izvod inverzne funkcije) dobijamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x(\bar{c}))}{g'(x(\bar{c}))}.$$

Ako uzmemo $x(\bar{c}) = c$, dobijamo tvrđenje teoreme. □

Pokažimo da Košijeva teorema predstavlja uopštenje Lagranžove teoreme. Naime, za $g(x) = x$, $x \in (a, b)$, dobijamo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1},$$

što daje tvrđenje Lagranžove teoreme.

4.13 Tejlorova formula

Prilikom uvođenja pojma diferencijala i priraštaja funkcije (poglavlje 4.8) izveli smo i formulu za približno izračunavanje vrednosti funkcije f u tački $x_0 + x$ pomoću vrednosti funkcije i njenog prvog izvoda u tački x_0 . Naime, na osnovu (4.15) važi približna jednakost

$$f(x_0 + x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot x, \text{ ako je } x \approx 0.$$

Prethodna formula može da se shvati kao aproksimacija funkcije f sa polinomom prvog stepena po x , razumljivo u nekom dovoljno malom intervalu oko tačke x_0 . U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se vrednost funkcije f u tački $x = x_0 + x$, za $x \approx 0$, može približno izračunati pomoću vrednosti jednog pogodnog polinoma stepena n u tački x_0 .

Da bismo odredili taj polinom, podsetimo se da se proizvoljan polinom stepena n ,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

(pod uslovom $a_n \neq 0$), može prikazati kao

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{P_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pri čemu za $x_0 = 0$ važe jednakosti (4.23).

Neka je funkcija f neprekidna i ima neprekidne sve izvode do n -tog reda na intervalu $[a, b]$ i ima $n + 1$ izvod na intervalu (a, b) . Ako označimo sa $P_n(x_0, x)$

polinom n -tog stepena dat sa

$$\begin{aligned}
 P_n(x_0, x) = P_n(x) = & f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\
 & + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\
 & + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R},
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

tada važi

$$f(x_0) = P_n(x_0, x_0), \quad f'(x_0) = P_n'(x_0, x_0), \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0, x_0).$$

Polinom $P_n(x_0, x)$ dat sa (4.30) naziva se *Tejlorov polinom n -tog stepena funkcije f u tački x_0* . Prirodno je uporediti vrednosti funkcije f i polinoma $P_n(x_0, x)$ tj. njihovu razliku $r_n(x_0, x)$, datu sa

$$r_n(x_0, x) = f(x) - P_n(x_0, x). \tag{4.31}$$

Za procenu $r_n(x_0, x)$ potrebna je Tejlorova teorema.

Teorema 4.19. (Tejlorova teorema.) ³ *Ako je funkcija f neprekidna i ima neprekidne sve izvode do n -tog reda na intervalu $[a, b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu (a, b) , tada za svaku funkciju koja je neprekidna na $[a, b]$ i ima izvod različit od nule na (a, b) postoji $c \in (a, b)$ tako da važi*

$$r_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.32}$$

Dokaz. Neka je x fiksiran element iz intervala $[a, b]$. Posmatraćemo pomoću funkciju F na intervalu $[a, b]$ datu sa

$$F(t) = f(x) - P_n(t, x), \quad t \in [a, b],$$

³B. Taylor (1685–1731)

odnosno

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

Primetimo da je $F(x) = 0$ i $F(x_0) = r_n(x_0, x)$.

Funkcija F je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) i važi

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \left(f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right) \\ &= - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Primenimo Košijevu teoremu na funkcije F i f na intervalu $[a, b]$. Obe su neprekidne na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilne na otvorenom intervalu (a, b) i $f'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$. Tada postoji $c \in (a, b)$ tako da važi

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{(x) - (x_0)} = \frac{F'(c)}{f'(c)}.$$

Kako je $F(x) = 0$, na osnovu (4.33) imamo

$$\frac{-F(x_0)}{(x) - (x_0)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{f'(c)},$$

odnosno

$$F(x_0) = ((x) - (x_0)) \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{f'(c)},$$

a $F(x_0) = r_n(x_0, x)$. □

1. Ako funkcija f ima oblik $f(t) = x - t$, onda dobijamo *Košijev oblik ostatka*

$$r_n(x_0, x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0), \quad c \in (x_0, x). \quad (4.34)$$

2. Ako funkcija ima oblik $f(t) = (x-t)^{n+1}$, onda dobijamo *Lagranžov oblik ostatka*

$$r_n(x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}, \quad c \in (x_0, x). \quad (4.35)$$

U daljem radu koristićemo Lagranžov oblik ostatka. Primetimo da ili $c \in (x_0, x)$ ili $c \in (x, x_0)$, pa se često c zapisuje kao $c = x_0 + \theta(x-x_0)$ i $0 < \theta < 1$.

Znači, ako je funkcija f neprekidna i ima neprekidne sve izvode do n -tog reda na intervalu $[a, b]$ i ima izvod $f^{(n+1)}$ na intervalu (a, b) , tada važi *Tejlorova formula*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + r_n(x_0, x)$$

gde je

$$r_n(x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1},$$

a $c = a + \theta(x-a)$ i $0 < \theta < 1$.

Tejlorova teorema pokazuje da važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - P_n(x_0, x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} r_n(x_0, x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-x_0) = 0,$$

za Košijev ostatak, odnosno

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - P_n(x_0, x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} r_n(x_0, x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

za Lagranžov oblik ostatka.

Ove granične vrednosti pokazuju da je polinom $P_n(x_0, x)$ aproksimacija funkcije f u okolini tačke x_0 , što označavamo sa $f(x) \approx P_n(x_0, x)$, $x \approx x_0$. Greška ove aproksimacije je $r_n(x_0, x)$.

Znači, Tejlorova formula se može zapisati kao

$$f(x) = P_n(x_0, x) + o(x-x_0)^n, \quad x \rightarrow x_0. \quad (4.36)$$

Formula 4.36 se zove još i *lokalna Tejlorova formula* i važi i pod slabijim pretpostavkama na funkciju. Naime, dovoljno je pretpostaviti postojanje izvoda $f'(x_0)$, \dots , $f^{(n)}(x_0)$.

Primer 4.53. Polinom $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$, $x \in \mathbb{R}$, razvićemo po stepenima binoma $x - 2$ (tj. $x_0 = 2$).

Kako je $f(2) = -16$ i

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7, \quad f'(2) = -33;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x - 6, \quad f''(2) = -18;$$

$$f'''(x) = 24x - 30, \quad f'''(2) = 18;$$

$$f^{(4)}(x) = 24, \quad f^{(4)}(2) = 24,$$

to je

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 &= -16 - 33(x-2) - 18\frac{(x-2)^2}{2} + 18\frac{(x-2)^3}{3!} \\ &\quad + 24\frac{(x-2)^4}{4!} \\ &= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4. \end{aligned}$$

U ovom slučaju, peti izvod polinoma f identički je jednak nuli.

Uopšte, kod razvoja nekog polinoma stepena n u Tejlorov polinom istog stepena imamo grešku koja je identički jednaka nuli.

Specijalno za $x_0 = 0$ i $x \in [0, b]$ imamo *Maklorenovu formulu*⁴ :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + r_n(0, x).$$

Analogno, polinom

$$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

se naziva *Maklorenov polinom* stepena n za funkciju f i on aproksimira funkciju f

⁴C. MacLaurin (1694–1742)

sa greškom $r_n(0, x)$, gde je

$$r_n(0, x) = \frac{x}{n!} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n \quad \text{ili} \quad r_n(0, x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),$$

a $c = x$, $0 < c < 1$.

Primer 4.54. Funkciju $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, aproksimiraćemo Maklorenovim polinomom

a) prvog stepena; b) drugog stepena; c) trećeg stepena,

i oceniti grešku na intervalu $[0, 1]$.

Pre svega je

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) = f^{(4)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pa je $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$.

a) Za $n = 1$ je $e^x \approx 1 + x$ (sl. 4.6) kada je $x \approx 0$, a ostatak se može zapisati kao

$$R_1 = \frac{x^2}{2} e^c, \quad \text{za } c = x, \quad 0 < c < 1.$$

Tada se greška za $x \in [0, 1]$ može oceniti sa

$$|R_1(x)| \leq \frac{x^2}{2} e \leq \frac{e}{2} \approx 1,359.$$

b) Za $n = 2$ je

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(sl. 4.7) kada je $x \approx 0$ i ostatak je

$$R_2 = \frac{x^3}{3!} e^c, \quad c = x, \quad 0 < c < 1.$$

Ocena greške na intervalu $[0, 1]$ je

$$|R_2(x)| \leq \frac{x^3}{3!} e \leq \frac{e}{6} \approx 0,453.$$

c) Za $n = 3$ je

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

kada je $x \approx 0$, i greška na intervalu $[0, 1]$ je

$$|R_3(x)| = \frac{x^4}{4!} e^c \leq \frac{e}{24} \approx 0,113, \quad c = x, \quad 0 < x < 1.$$

Primetimo da se sa povećanjem stepena n greška po apsolutnoj vrednosti smanjuje, tj. aproksimacija funkcije sa njenim Maklorenovim polinomom je bolja što je njegov stepen viši. Ostavljamo čitaocu da pokaže da funkciju $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 1]$ Maklorenov polinom šestog stepena aproksimira sa greškom manjom od 0,00054.

Slika 4.6.

Slika 4.7.

Primer 4.55. Odredićemo Maklorenove polinome do člana x^4 za sledeće funkcije:

a) $f(x) = \sin x;$ b) $f(x) = \cos x;$ c) $f(x) = \frac{1}{1-x}.$

a) Kako je $f(0) = 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1, & f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1, & f^{(4)}(x) &= \sin x, & f^{(4)}(0) &= 0, \end{aligned}$$

to je traženi Maklorenov polinom za funkciju $f(x) = \sin x$ jednak

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

i važi

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{za } x \approx 0.$$

b) U ovom slučaju je $f(0) = 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0, & f''(x) &= -\cos x, \\ f''(0) &= -1, & f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0, & f^{(4)}(x) &= \cos x, & f^{(4)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

Maklorenov polinom četvrtog stepena za funkciju $f(x) = \cos x$ je

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

i važi

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad x \approx 0.$$

c) Kako je $f(0) = 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f'(0) = 1, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$f''(0) = 2, \quad f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \quad f'''(0) = 6, \quad f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1-x)^5}, \quad f^{(4)}(0) = 4!,$$

to je traženi Maklorenov polinom

$$P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

i važi

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + x^3 + x^4, \quad x \approx 0.$$

Prilikom primene Maklorenove formule koristi se sledeće tvrđenje. Ako je

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

tada je

$$f(bx) = \sum_{k=0}^n a_k b^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0, \quad b \neq 0.$$

Primer 4.56. Primenićemo Maklorenovu formulu za funkcije

a) $f(x) = e^{5x+1};$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$

a) Iz $e^{5x+1} = e \cdot e^{5x}$ dobijamo

$$e^{5x+1} = e \sum_{k=0}^n \frac{5^k x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

b) Na osnovu $f(x) = (1 + (-1)x)$, $\in \mathbb{Q}$ i

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n (-1) \dots (-n+1)(1-x)^{-n}$$

važi

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

gde je za $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \dots (-\frac{1}{2} - (k-1))}{k!} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Tako dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Primer 4.57. Primenićemo Maklorenovu formulu na funkciju $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$.

Iz $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$, sledi

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} 2^{4k-3} x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

i

$$f(x) = x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^5) \quad (n=5), \quad x \rightarrow 0.$$

Granične vrednosti nekih funkcija mogu se odrediti korišćenjem Maklorenovih polinoma.

Primer 4.58. Odredićemo graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - 2e^x + 2x^2}{\arcsin x - \sin x}$.

Koristićemo Maklorenove formule za odgovarajuće funkcije:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

$$t = \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Odatle je

$$\begin{aligned} \sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} &= 1 + \frac{2 \operatorname{tg} x}{2} - \frac{(2 \operatorname{tg} x)^2}{8} + \frac{(2 \operatorname{tg} x)^3}{16} + o(\operatorname{tg}^3 x) \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dalje je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Na osnovu toga je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+2\operatorname{tg}x} - 2e^x + 2x^2}{\arcsin x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)} = 4.$$

4.14 L'opitalovo pravilo

Za određivanje graničnih vrednosti $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, često se koriste sledeće dve teoreme.

Teorema 4.20. (L'opitalovo⁵ pravilo.) *Neka su funkcije f i g diferencijabilne u svakoj tački intervala (a, b) , sem možda u tački $x_0 \in (a, b)$. Neka su još ispunjena sledeća tri uslova:*

1. $g'(x) \neq 0$ za $x \neq x_0$;
2. obe funkcije f i g teže nuli (respektivno teže ka ∞) kada x teži x_0 ;
3. postoji $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Daćemo samo dokaz ("grublja" verzija) za slučaj kada $f(x) \rightarrow 0$ i $g(x) \rightarrow 0$, za $x \rightarrow x_0$, i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Pokazaćemo da je tada i $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Definišimo funkcije F i G na sledeći način:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Tada važe jednakosti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = F(x_0) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 = G(x_0),$$

⁵G. F. A. l'Hospital (1661–1704)

Kako su funkcije f i g neprekidne u svakoj tački intervala (a, b) , sem možda u tački x_0 , to su funkcije F i G neprekidne na celom intervalu (a, b) . Takođe je za svako t iz intervala (x, x_0) i (x_0, x) , gde je $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, zadovoljeno $F'(t) = f'(t)$ i $G'(t) = g'(t)$, što znači da funkcije F i G zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme 4.18 na svakom od tih intervala (x, x_0) i (x_0, x) . Posmatrajmo prvo interval (x, x_0) . Tada postoji $c \in (x, x_0)$ takvo da je

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Na osnovu relacije (4.37) je $F(x_0) = 0$ i $G(x_0) = 0$, pa sledi da je za $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (4.38)$$

Primetimo da $c \rightarrow x_0$ kada $x \rightarrow x_0$ (ovo ne dokazujemo ovde), pa pošto prema uslovu 3. izraz na desnoj strani (4.38) ima graničnu vrednost jednaku L , to i količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ mora imati istu graničnu vrednost, tj. mora biti

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0 - 0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

Polazeći od intervala (x_0, x) , analogno se dokazuje da je

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0 + 0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

Zadnje dve jednakosti daju traženo tvrđenje. \square

Teorema 4.21. (Lopitalovo pravilo.) *Neka su funkcije f i g diferencijabilne u svakoj tački intervala (a, ∞) , i neka su još ispunjena sledeća tri uslova:*

1. postoji $\delta > a$ tako da je $g'(x) \neq 0$ za sve $x > \delta$;
2. obe funkcije f i g teže nuli (respektivno teže ka ∞) kada x teži ∞ ;
3. postoji $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji granična vrednost $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

U praksi, kada treba odrediti graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, postupamo na sledeći način. Prvo proverimo da li je u pitanju granična vrednost " $\frac{0}{0}$ " ili " $\frac{\infty}{\infty}$ ", pa ako jeste, ispitujemo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ako ona postoji, onda postoji i tražena granična vrednost i obe su međusobno jednake. Analogno postupamo u slučaju da x teži ka $+$ ili ka $-$.

Primer 4.59. Koristeći Lopitalovo pravilo, odredićemo sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin 2x}.$$

a) Pokažimo prvo da su ispunjeni uslovi za primenu Lopitalovog pravila. Pre svega, funkcije $f(x) = \cos x + 3x - 1$ i $g(x) = 2x$ su diferencijabilne u proizvoljnom intervalu koji sadrži tačku nula i dati izraz je oblika " $\frac{0}{0}$ " kada $x \rightarrow 0$, jer je $f(0) = g(0) = 0$. Dalje je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + 3x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 3}{2} = 3/2.$$

Na osnovu Lopitalovog pravila je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 3x - 1}{2x} = 3/2.$$

b) Uslovi Lopitalovog pravila su ispunjeni pa je

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos x}{x \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin x}{\sin 2x + 2x \cos 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos x}{4 \cos 2x - 4x \sin 2x} = 4/4 = 1. \end{aligned}$$

Primer 4.60. Koristeći Lopitalovo pravilo, odredićemo sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +} \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}}.$$

a) Dati izraz je oblika " $\frac{\infty}{\infty}$ ", pa je

$$\lim_{x \rightarrow +} \frac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{6x + 2}{2x} = \frac{6}{2} = 3.$$

Prethodni primer se mogao uraditi i bez Lopitalovog pravila (sasvim elementarno, "izdvajanjem x^2 iz brojioca i imenioca"). Međutim, sledeći primer sa ne može uraditi elementarno.

b) Uslovi Lopitalovog pravila su ispunjeni pa je

$$\lim_{x \rightarrow +} \frac{2 \ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Pomoću Lopitalovog pravila se mogu odrediti i sledeće granične vrednosti.

Primer 4.61. Odredićemo sledeće granične vrednosti: $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-x}{-1} = 0. \end{aligned}$$

U sledećim zadacima javljaju se neodređeni izrazi oblika 0^0 , $1 \cdot 0$ i $0 \cdot 0$. Njihove granične vrednosti određuju se prethodnim logaritmovanjem, pa primenom Lopitalovog pravila.

Primer 4.62. Odredićemo sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}$; c) $\lim_{x \rightarrow +} x^{1/x}$.

a) Za funkciju $y = x^x$ važi

$$\ln y = x \ln x,$$

odakle je

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (-x) = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y} = e^0 = 1.$$

b) Za funkciju $y = (1 + 2x)^{1/x}$ važi

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + 2x),$$

odakle je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 2.$$

Na osnovu toga je $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln y} = e^2$.

c) Iz $y = x^{1/x}$ sledi $\ln y = \frac{\ln x}{x}$, pa je

$$\lim_{x \rightarrow +} \ln y = \lim_{x \rightarrow +} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{1}{x} = 0.$$

Na osnovu toga je

$$\lim_{x \rightarrow +} x^{1/x} = e^0 = 1.$$

Primer 4.63. Odredićemo graničnu vrednost $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Ovde se javlja izraz " - ", i granična vrednost se takođe može dobiti primenom Lopitalovog pravila, nakon primena odgovarajućih transformacija.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Lopitalovo pravilo se može primeniti na jednostavno određivanje velikog broja graničnih vrednosti. Međutim ne možemo ga primeniti na sve zadatke u kojima se traži određivanje graničnih vrednosti, što pokazuje sledeći primer.

Primer 4.64. Za određivanje $\lim_{x \rightarrow +} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x}$ ne može se primeniti Lopitalovo pravilo, jer ne postoji

$$\lim_{x \rightarrow +} \frac{(2x - \sin x)'}{(2x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}.$$

Naime, ne postoji $\lim_{x \rightarrow +} \cos x$, što se može pokazati na sledeći način. Izaberimo dva niza, sa opštim članovima $x_n = 2n$ i $y_n = \frac{(2n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, koji oba divergiraju ka $+$. Tada je

$$\cos x_k = \cos 2k = 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +} \cos x_k = 1 \text{ i } \cos y_k = \cos \frac{(2k+1)}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +} \cos y_k = 0.$$

Zadnje dve granične vrednosti su različite, pa ne postoji $\lim_{x \rightarrow +} \cos x$.

Međutim, ovaj zadatak se može rešiti na sledeći način, bez korišćenja Lopitalovog pravila.

Kako je za $x > 2$

$$\frac{2x-1}{2x+1} \leq \frac{2x-\sin x}{2x+\sin x} \leq \frac{2x+1}{2x-1} \quad \text{i važi} \quad \lim_{x \rightarrow +} \frac{2x-1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +} \frac{2x+1}{2x-1} = 1,$$

to je $\lim_{x \rightarrow +} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x} = 1$.

4.15 Primena izvoda na nejednakosti

Primenom prvog izvoda možemo izvesti i sledeće nejednakosti.

Primer 4.65. Pokazaćemo prvo za $x > 0$ važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} x - x + 1 &\leq 1, \text{ za } 0 < x < 1; \\ x - x + 1 &\geq 1, \text{ za } x < 0 \text{ ili } x > 1. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Uvedimo funkciju $f(x) = x - x + 1 - 1$. Tada je $f(1) = 0$. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = (x^{-1} - 1)$, pa je $f'(1) = 0$.

Neka $x \in (0, 1)$. Za $0 < x < 1$, je $f'(x) > 0$, a za $x > 1$ i $f'(x) < 0$. Odavde sledi da funkcija f ima maksimum u tački $x = 1$, što za $x > 0$ daje

$$f(x) = x - x + 1 - 1 \leq f(1) = 0,$$

tj. prvu od dve nejednakosti u (4.39).

Druga nejednakost sledi analogno.

Primer 4.66. Neka su $p, q, a, b, x_j, y_j, j = 1, \dots, n$, pozitivni brojevi, i neka važi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pokazaćemo

a) *Jangove nejednakosti:*

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad p > 1, \quad \text{odnosno} \quad a^{1/p} \cdot b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad 0 < p < 1.$$

b) *Helderove⁶ nejednakosti:*

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^n x_j y_j &\leq \left(\prod_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} \cdot \left(\prod_{j=1}^n y_j^q \right)^{1/q}, \quad p > 1; \\ \prod_{j=1}^n x_j y_j &\geq \left(\prod_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} \cdot \left(\prod_{j=1}^n y_j^q \right)^{1/q}, \quad 0 < p < 1. \end{aligned}$$

Za $p = 2$ (tada je i $q = 2$) dobija se poznata *Koši–Švarcova⁷ nejednakost*.

c) *Nejednakosti Minkovskog:⁸*

$$\left(\prod_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{1/p} \leq \left(\prod_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} + \left(\prod_{j=1}^n y_j^p \right)^{1/p}, \quad p > 1;$$

⁶O. Hölder (1859–1937)

⁷H. A. Schwarz (1843–1921)

⁸H. Minkowski (1864–1909)

$$\left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{1/p}, \quad 0 < p < 1.$$

Dokazaćemo gornje nejednakosti samo za $p > 1$.

a) Ako u prvu nejednakost u (4.39) iz zadatka 4.65 stavimo $x = a/b$, $a, b > 0$ i $= 1/p$, $1/q = 1 - 1/p$, tada dobijamo

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{1/p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{p} - 1 \leq 0, \quad \text{odnosno} \quad a^{1/p} \cdot b^{1-1/p} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b.$$

b) Ako u prvu Jangovu nejednakost (pod a)) stavimo $a = \frac{x_j^p}{A}$, $b = \frac{y_j^q}{B}$, $j = 1, 2, \dots, n$, gde su x_j, y_j, A i B pozitivni brojevi, tada dobijamo:

$$\frac{x_j y_j}{A^{1/p} B^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{x_j^p}{A} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y_j^q}{B}, \quad p > 1.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti po j , ako stavimo $A = \sum_{j=1}^n x_j^p$, $B = \sum_{j=1}^n y_j^q$, korišćenjem jednakosti $q = \frac{p}{p-1}$, dobijamo Helderovu nejednakost za $p > 1$

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j^q \right)^{1/q}.$$

c) Ako na desnu stranu identiteta

$$\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p = \sum_{j=1}^n x_j (x_j + y_j)^{p-1} + \sum_{j=1}^n y_j (x_j + y_j)^{p-1}$$

primenimo prvu Helderovu nejednakost (iz b)), dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p &= \left(\sum_{j=1}^n x_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n y_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^{q(p-1)} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Odavde, iz $q = \frac{p}{p-1}$ sledi nejednakost Minkovskog za $p > 1$.

4.16 Konveksnost i konkavnost

Definicija 4.4. Funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna (ili: konkavna odozgo) na intervalu (a, b) ako za svaki par $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svako $\lambda \in (0, 1)$ važi

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (4.40)$$

Funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je konkavna (ili: konkavna odozdo) na intervalu (a, b) ako za svaki par $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svako $\lambda \in (0, 1)$ važi

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (4.41)$$

Za funkciju koja zadovoljava striktnu nejednakost u (4.40) (resp. u (4.41)), kažemo da je *strogo konveksna* (resp. *strogo konkavna*).

Geometrijsko tumačenje konveksnosti

Posmatramo grafik funkcije f na intervalu (a, b) na kome je ona definisana. Neka su x_1 i x_2 proizvoljne dve tačke iz intervala (a, b) , tj. $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 \neq x_2$. Povucimo pravu koja je određena tačkama $P(x_1, y_1)$, $y_1 = f(x_1)$ i $Q(x_2, y_2)$, $y_2 = f(x_2)$, tj. sečicu PQ (sl. 4.8). Njena jednačina je

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \text{odnosno} \quad y = y_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Označimo sa $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Tada je $1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Ako je funkcija f konveksna, tada važi relacija (4.40), odnosno možemo pisati

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Iz relacije (4.42) sledi da se da se tačka $R(x, f(x))$, $x \in (x_1, x_2)$, grafika konveksne funkcije f nalazi ispod tačke $S(x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$, $x \in (x_1, x_2)$, koja pripada sečici PQ (sl. 4.8). U slučaju konkavne krive, proizvoljna tetiva PQ je ispod njenog

Slika 4.8. Konveksna kriva.

Slika 4.9. Konkavna kriva.

grafika (sl. 4.9).

Teorema 4.22. Neka je funkcija f diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) . Potreban i dovoljan uslov da funkcija f bude konveksna (odnosno konkavna) jeste da f' ne opada (odnosno ne raste). Ako f' raste tada je f strogo konveksna funkcija.

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija i neka su dve proizvoljne tačke $x_1, x_2 \in (a, b)$. Ako tačka $x \in (x_1, x_2)$, tada se može pisati

$$x = x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2.$$

Funkcija f je konveksna pa je

$$f(x) = f\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2\right) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Na osnovu toga važi

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \quad (4.43)$$

Dakle, ako u relaciji (4.43) prvo pustimo da x teži ka $x_1 + 0$ na osnovu neprekidnosti sledi da je

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ako u relaciji (4.43) dalje pustimo da x teži ka $x_2 - 0$ na osnovu neprekidnosti sledi da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Odatle je

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Iz prethodnih nejednakosti sledi monotonost prvog izvoda.

Neka prvi izvod f' raste na intervalu (a, b) . Tada za $x_1, x_2, x \in (a, b)$, $x_1 < x < x_2$, na osnovu Lagranžove teoreme postoje tačke $c_1 \in (x_1, x)$ i $c_2 \in (x, x_2)$ takve da je

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad c_1 \in (x_1, x), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad c_2 \in (x, x_2).$$

Prvi izvod je monotona funkcija, pa je $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, ($c_1 < c_2$) odnosno

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

odnosno važi relacija (4.43) što znači da je funkcija f konveksna.

Za rastuće f' koristimo isti dokaz samo je sada $f'(c_1) < f'(c_2)$, odakle sledi stroga konveksnost.

Analogno se pokazuje i za konkavnu funkciju na intervalu (a, b) . \square

Teorema 4.23. *Ako je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu koji sadrži tačku c , tada je u tački $P(c, f(c))$ funkcija f konveksna ako i samo ako je $f''(c) \geq 0$. Ako je $f''(c) > 0$ tada je funkcija f strogo konveksna.*

Dokaz. Sledi iz prethodne teoreme i kriterijuma monotonosti pomoću prvog izvoda.
□

Teorema 4.24. *Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b) . Funkcija f je strogo konveksna (resp. strogo konkavna) na intervalu (a, b) , ako i samo ako za svako $c \in (a, b)$ i za svako $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ važi*

$$f(x) > y_t(x) \quad (f(x) < y_t(x)), \quad (4.44)$$

gde je $y_t(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $(c, f(c))$.

Dokaz. Neka je funkcija f konveksna. Jednačina tangente u tački $P(c, f(c))$ je oblika

$$y_t(x) - f(c) = f'(c)(x - c), \quad \text{odnosno} \quad y_t(x) = f(c) + f'(c)(x - c). \quad (4.45)$$

Neka je $x \in (a, b)$. Tada je

$$f(x) - y_t(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x - c).$$

Kako funkcija f zadovoljava uslove Lagranžove teoreme na intervalu $[x, c]$, to postoji tačka $d \in (x, c)$ sa osobinom

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c). \quad (4.46)$$

Iz relacija (4.45) i (4.46) sledi

$$f(x) - y_t(x) = (f'(d) - f'(c))(x - c),$$

gde tačka $d \in (x, c)$, a takođe i $d \in (a, b)$. Ako je funkcija konveksna, tada na osnovu teoreme 4.22 f' raste, pa je zadovoljena relacija (4.44) ($f(x) - y_t(x) > 0$.)

Analogno se pokazuje da ako prvi izvod funkcije f raste tada je funkcija konveksna. □

Iz prethodnog sledi da je grafik strogo konveksne funkcije na intervalu (a, b) iznad tangente funkcije u tački $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ (sl. 4.10).

Slika 4.10. Konveksna kriva.

Slika 4.11. Konkavna kriva.

Sa druge strane, grafik strogo konkavne funkcije na intervalu (a, b) je ispod tangente funkcije u tački $(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ (sl. 4.11).

Primer 4.67. Odredićemo intervale konveksnosti odnosno konkavnosti za sledeće funkcije:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

a) U ovom slučaju je $f'(x) = 3x^2 - 6x$ i $f''(x) = 6x - 6$, pa je $f''(1) = 0$. Odavde sledi da je data funkcija konveksna za $x > 1$ i konkavna za $x < 1$.

c) Drugi izvod date funkcije je $f''(x) = \frac{2}{9x^{5/3}}$, $x \neq 0$. Funkcija je konveksna na $(0, +\infty)$. Funkcija je konkavna na $(-\infty, 0)$.

Definicija 4.5. Neka je f neprekidna funkcija na intervalu (a, b) i diferencijabilna u tački $c \in (a, b)$. Ako funkcija f menja karakter svoje konkavnosti u c (tj. prelazi iz konveksnosti u konkavnost, ili obrnuto), tada se tačka $(c, f(c))$ (na grafiku funkcije f) naziva prevojna tačka funkcije f .

Potreban uslov za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

Teorema 4.25. Ako je $(c, f(c))$ prevojna tačka funkcije f , tada je ili $f''(c) = 0$ ili $f''(c)$ ne postoji.

Primer 4.68. Odredićemo prevojne tačke za funkcije date u primeru 4.67.

a) Prevojna tačka grafika date funkcije je tačka $(1, -1)$.

b) Prevojna tačka grafika date funkcije je tačka $(0, -1)$, i pored toga što u toj tački drugi izvod ne postoji.

Dovoljne uslove za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

Teorema 4.26. Neka je funkcija f diferencijabilna u tački c i dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) koji sadrži tačku c , izuzev možda u samoj tački c . Tada je $(c, f(c))$ prevojna tačka funkcije f , ako f'' "menja znak prolaskom kroz tačku c ," odnosno ako postoji prozvoljno malo $\epsilon > 0$, tako da važi

$$f''(x_1) \cdot f''(x_2) < 0, \text{ za svako } x_1 \in (c - \epsilon), x_2 \in (c, c + \epsilon)$$

Drugi kriterijum za određivanje ekstremnih vrednosti funkcije

Teorema 4.27. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) koji sadrži tačku c i neka je $f'(c) = 0$.

Ako je $f''(c) < 0$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u tački c .
Ako je $f''(c) > 0$, tada funkcija f ima lokalni minimum u tački c .

Dokaz. Uslov $f'(c) = 0$, povlači da je tangenta na datu krivu u tački $P(c, f(c))$ horizontalna. Ako je još i $f''(c) < 0$, tada postoji interval (a, b) , koji sadrži tačku c takav da je funkcija konkavna odozdo, pa se grafik date funkcije nalazi ispod tangente u tački P . To znači da data funkcija ima lokalni maksimum u tački P .

Analogno se pokazuje tvrđenje i u slučaju kada je $f''(c) > 0$. □

Slučaj $f''(c) = 0$ je obuhvaćen sledećom teoremom.

Teorema 4.28. Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) koji sadrži tačku c i neka važe jednakosti $f'(c) = 0$ i $f''(c) = 0$. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n > 2$ sa osobinom $f^{(n)}(c) \neq 0$ i neka je n i najmanji takav broj. Tada važi sledeće:

1) Ako je broj n paran tada funkcija f ima ekstremnu vrednost u tački c , i to:

lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(c) < 0$,
lokalni minimum ako je $f^{(n)}(c) > 0$.

2) Ako je broj n neparan, tada funkcija f nema ekstremnu vrednost u tački c .

Dokaz. Neka je $f'(c) = f''(c) = f^{(n-1)}(c) = 0$, $f^{(n)}(c) \neq 0$. Na osnovu lokalne Tejlorove formule je

$$f(x) = f(c) + \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n)}(c) + o((x-c)^n), \quad x \rightarrow c,$$

odnosno

$$f(x) - f(c) = \frac{(x-c)^n}{n!} (f^{(n)}(c) + \psi(x)),$$

gde je $\lim_{x \rightarrow c} \psi(x) = 0$.

1. Ako je n paran broj tada je $(x - c)^n$ nenegativno, pa je znak $f^{(n)}(c) +$, za x u dovoljno maloj okolini tačke c , određen znakom $f^{(n)}(c)$, jer je $\lim_{x \rightarrow c} (x - c) = 0$.

Prema tome ako je $f^{(n)}(c) < 0$, tada je $f(x) - f(c) < 0$, pa funkcija f ima lokalni maksimum u tački c .

Ako je $f^{(n)}(c) > 0$, tada je $f(x) - f(c) > 0$ pa funkcija f ima lokalni minimum u tački c .

2. Ako je n neparan broj tada je $(x - c)^n$ menja znak u zavisnosti od znaka $x - c$. \square

Primer 4.69. Odredićemo ekstremne vrednosti i intervale monotonosti sledećih funkcija $x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x - \sin x$; **b)** $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$.

a) Kako je $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, to funkcija f raste na skupu $\mathbb{R} \setminus \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Kako je $f''(2k) = \sin(2k) = 0$ i $f'''(2k) = \cos(2k) = (-1)^k \neq 0$, to funkcija f u tačkama $x_k = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, ima prevojne tačke. Prema tome funkcija f raste na intervalu $(-, +)$.

b) Kako je

$$f'(x) = (2x)x^{2/3} + (x^2 - 8) \left(\frac{2}{3}x^{-1/3} \right) = \frac{6x^2 + 2(x^2 - 8)}{3x^{1/3}} = \frac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}},$$

to je $f'(x) = 0$ za $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Treća tačka u kojoj funkcija f može imati lokalni ekstrem je $x_3 = 0$, jer u njoj prvi izvod date funkcije ne postoji.

Pošto je za svako $x \neq 0$:

$$f''(x) = \frac{8}{9} \cdot \frac{5x^2 + 2}{x^{4/3}} > 0,$$

to funkcija f ima lokalni minimum u tačkama $x_1 = -\sqrt{2}$ i $x_2 = \sqrt{2}$. Kako je $x^2 - 2 > 0$ za $x \in (-, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +)$ i $x^2 - 2 < 0$ za $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

to je $f'(x) > 0$ za $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +)$. Na ta dva intervala funkcija f raste.

Funkcija f opada na intervalima $(-, -\sqrt{2})$ i $(0, \sqrt{2})$, jer je na svakom od njih $f'(x) < 0$.

Najzad, funkcija f ima lokalni maksimum u tački $x_3 = 0$, jer prvi izvod f' menja znak prolaskom kroz tačku 0.

4.17 Primena izvoda

Primer 4.70. Od kartona pravougaonog oblika dužine 21 cm i širine 16 cm, treba iseći jednake kvadrate oko svakog temena tako da se dobije otvorena kutija oblika kvadra sa najvećom zapreminom.

Ako označimo sa x stranicu kvadrata koji se iseca, tada su dimenzije kutije x , $16 - 2x$ i $21 - 2x$, pa je njegova zapremina

$$V(x) = x(16 - 2x)(21 - 2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3), \quad x \in [0, 8].$$

Prvi izvod funkcije V je

$$V'(x) = 2(168 - 74x + 6x^2) = 4(3x - 28)(x - 3)$$

te su njene nule $x_1 = 28/3$ i $x_2 = 3$, pri čemu je $x_1 > 8$, pa nema smisla u našem slučaju. Drugi izvod funkcije V je $V''(x) = 4(6x - 37)$, pa je $V''(3) < 0$. Prema tome, funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = 3$; potrebno je proveriti da li je to i globalni maksimum. To u ovom slučaju znači da treba ispitati još i vrednosti funkcije u krajnjim tačkama. Kako je $V = 0$ za $x = 0$ i $x = 8$, to se najveća zapremina $V = 450 \text{ cm}^3$ zaista dobija za $x = 3$, tj. kada se iz svakog ugla iseče kvadrat stranice 3 cm.

Primer 4.71. Odrediti dimenzije kontejnera oblika kružnog valjka date zapremine $V = 24 \text{ m}^3$ tako da cena utrošenog materijala bude minimalna, ako je materijal koji se koristi za dno tri puta skuplji od materijala za omotač.

Ako označimo sa r poluprečnik kruga koji se nalazi u osnovi valjka, sa H njegovu visinu, tada zbog $V = Hr^2$ možemo pisati $H = 24/r^2$. Ako sa c dinara označimo cenu kvadratnog metra materijala koji se koristi za omotač valjka, tada omotač valjka staje $c(2rH)$, a osnova staje $3c(r^2)$. Ukupna cena materijala za ceo valjak je

$$C(r) = c(2rH) + 3c(r^2) = c(3r^2 + 2rH) = c\left(3r^2 + \frac{48}{r}\right).$$

Kako je

$$C'(r) = c\left(6r - \frac{48}{r^2}\right) = 6c\left(\frac{r^3 - 8}{r^2}\right),$$

to je $C'(r) = 0$ za $r = 2$. Zbog

$$C''(r) = c\left(6 + \frac{96}{r^3}\right)$$

je $C''(2) > 0$, pa će se najjeftiniji valjak dobiti ako je poluprečnik $r = 2$ cm i visine $H = 6$ cm.

Primer 4.72. Neka se dva puta ukrštaju u tački P pod pravim uglom. Jedan automobil prođe tačku P u 10 sati pre podne putujući konstantnom brzinom od 20 km/h u desno (prema istoku). U isto vreme drugi automobil je 2 km udaljen od tačke P prema gore (prema severu), i on putujući prema dole (prema jugu) brzinom od 50 km/h. Odrediti vreme kada će ta dva automobila biti najbliže jedan drugome (sl. 4.13).

Označimo pomenute puteve pomoću x i y ose, a sa t broj sati posle 10 časova ujutro. Tada će sporiji automobil preći $20t$ km i biti u tački A , a brži automobil preći $50t$ km i biti u tački B . Rastojanje između A i B dato je sa

$$d = \sqrt{(2 - 50t)^2 + (20t)^2} = \sqrt{4 - 200t + 2900t^2}.$$

Funkcija $4 - 200t + 2900t^2$ je uvek pozitivna (dakle, nema problema sa definisanosti funkcije d), i nikada ne može biti jednaka nuli. Funkcija d je definisana na vremenskom intervalu od $t = 0$ do $t = 2/50 = 1/25$ (vreme stizanja drugog automobila u tačku P). Funkcija $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, je rastuća, tako da se ekstremne vrednosti funkcije $h(x) = \sqrt{f(x)}$, $f(x) > 0$ mogu odrediti pomoću ekstremnih vrednosti funkcije f , što je znatno jednostavnije. Ako označimo

$$f(t) = 4 - 200t + 2900t^2, \quad \text{tada je } f'(t) = -200 + 5800t,$$

pa je $f'(t) = 0$ za $t = \frac{200}{5800} = 1/29$. Zbog $f''(t) = 5800 > 0$, funkcija f ima za $t = 1/29$ lokalni minimum jednak $f(1/29) \approx 0,55$. Funkcija f je definisana na intervalu $[0, 1/25]$ i $f(0) = 4 > 0,55$ pa je u $t = 1/29$ apsolutni minimum za funkciju f .

Prema tome, automobili će biti najbliži jedan drugom posle $1/29$ sati od polaska, odnosno približno 2,07 minuta posle 10 sati. Najmanje rastojanje između njih biće $\sqrt{f(1/29)} \approx \sqrt{0,55} \approx 0,74$ km.

Fizički smisao izvoda

Ako funkcija $s = s(t)$, $t \geq 0$, opisuje pređeni put materijalne tačke (kao funkciju vremena t), tada je prvi izvod funkcije s u tački $t_0 > 0$ (ako postoji), *trenutna brzina* te materijalne tačke u momentu t_0 , dok je drugi izvod funkcije s u tački t_0 (ako postoji) **trenutno ubrzanje** te materijalne tačke u momentu t_0 .

Primer 4.73. Telo se kreće pravolinijski, a udaljenost od početne tačke data je zakonom

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t,$$

gde je vreme t dato u sekundama, a put s u metrima.

a) Odrediti vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja povećava i vremenski interval u kome se udaljenost s od početnog položaja smanjuje.

b) Odrediti vremenski interval u kome se brzina v povećava i vremenski interval u kome se brzina v smanjuje.

c) Odrediti razdaljinu tela od početne tačke posle 7 sekundi.

a) Prema prethodnom, brzina posmatranog tela je

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t + 36,$$

a ubrzanje je

$$a(t) = s''(t) = 6t - 24.$$

Udaljenost s od početnog položaja se povećava ako je $s'(t) = v(t) > 0$, tj. za

$$3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12) = 3(t - 2)(t - 6) > 0.$$

To se dešava za $0 < t < 2$ i $t > 6$. Udaljenost s od početnog položaja se smanjuje ako je $s'(t) = v(t) = 3(t - 2)(t - 6) < 0$, tj. za $2 < t < 6$.

b) Brzina se povećava ako je

$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 6t - 24 > 0, \quad \text{tj. ako je } t > 4.$$

Brzina se smanjuje ako je

Slika 4.12.

Slika 4.13.

dužina puta se povećava, što znači da se telo kreće u desno, tj. u pozitivnom smeru s ose. Za $t = 2$ je $s = 32$ m. Za sledeće 4 sekunde, tj. za $2 < t < 6$, rastojanje od tačke O se smanjuje, tj. telo se kreće u levo (u negativnom smeru s -ose). Za $t = 6$ je $s = 0$, tj. telo se vratilo u tački O . Ako se t dalje povećava, tj. za $6 < t < 7$, telo se ponovo kreće u desno i za $t = 7$ je udaljeno $s = 7$ m od tačke O .

Primer 4.74. (Vertikalna hitac.)

Projektil se ispaljuje vertikalno u vis brzinom od 400 m/sec. Opisati njegovo kretanje tokom vremena. Uzeti da je ubrzanje Zemljine teže $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Visina na koju se telo penje data je opštim izrazom

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

tj. u našem slučaju

$$h(t) = 400t - 5t^2.$$

Ovo je tipičan primer jednoliko usporenog kretanja. Visina $h = h(t)$, data u funkciji od vremena, jeste parabola okrenuta na dole, čije su nule $t_1 = 0$ s i $t_2 = 80$ s. Prva vrednost predstavlja trenutak lansiranja, a druga odgovara vremenu kada se projektil vrati na zemlju.

Brzina projektila je

$$v(t) = h'(t) = 400 - 10t.$$

Brzina $v(t)$ je pozitivna (usmerena naviše) sve do $t = 40$ s, a potom postaje negativna (usmerena na niže). Momenat $t = 40$ s odgovara maksimalnoj visini

$$h_{\max} = h(40) = 400 \cdot 40 - 5 \cdot 40^2 = 8000 \text{ m}.$$

Uočimo da je $v(80) = -400$ m/s, što znači da je brzina povratka po intenzitetu jednaka brzini lansiranja (što je posledica zakona o održanju energije).

4.18 Grafici funkcija

Detaljno ispitivanje funkcije podrazumeva sledeće tačke:

1. Određivanje maksimalnog skupa (u smislu inkluzije) na kojem je analitički oblik funkcije definisan, što će biti i domen funkcije.
2. Parnost i neparnost funkcije i periodičnost funkcije.
3. Nule funkcije i znak funkcije.
4. Monotonost funkcije.
5. Ekstremne vrednosti funkcije.
6. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije.
7. Asimptote funkcije.
8. Crtanje grafika funkcije.

Primer 4.75. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = x^4 - x^2$ (sl. 4.14).

1. Data funkcija je definisana na skupu \mathbb{R} .
2. Funkcija f je parna, jer je za sve $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = f(x)$.
3. Nule funkcije f se dobijaju iz $f(x) = 0$, tj. za $x^4 - x^2 = 0$, što važi za $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$. Kako je $f(x) = x^2(x^2 - 1)$, to je $f(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, a $f(x) < 0$ za $x \in (-1, 1)$.
4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$ i njegove nule su $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}/2$ i $x_3 = -\sqrt{2}/2$.

Data funkcija raste ako je $f'(x) = 2x(2x^2 - 1) > 0$. Kako je

$$2x^2 - 1 > 0 \quad \text{za} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty),$$

to za $x \in (\sqrt{2}/2, +\infty)$ važi $2x(2x^2 - 1) > 0$. Dalje je

$$2x^2 - 1 < 0 \quad \text{za} \quad x \in (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2),$$

pa za $x \in (-\sqrt{2}/2, 0)$ važi $2x(2x^2 - 1) > 0$. Dakle, funkcija f raste na intervalima $(-\sqrt{2}/2, 0)$ i $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

Slično se pokazuje da funkcija f opada na intervalima $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ i $(0, \sqrt{2}/2)$.

5. Drugi izvod funkcije f je $f'' = 12x^2 - 2$. Kako je $f''(0) = -2 < 0$, to funkcija f ima lokalni maksimum za $x = 0$, čija je vrednost $f(0) = 0$. Odgovarajuću tačku $A(0, 0)$ na grafiku funkcije f ćemo zvati lokalni maksimum.

Uopšte, ako neka funkcija ima u tački x_0 lokalni ekstrem, onda ćemo odgovarajuću tačku grafika $A(x_0, f(x_0))$ te funkcije zvati *lokalni ekstrem*.

Kako je $f''(\sqrt{2}/2) = 4 > 0$, to funkcija f u tački $B(\sqrt{2}/2, -1/4)$ ima lokalni minimum.

Kako je $f''(-\sqrt{2}/2) = 4 > 0$, to funkcija f u tački $C(-\sqrt{2}/2, -1/4)$ ima lokalni minimum.

6. Funkcija f je konveksna odozgo ako je $f''(x) = 12x^2 - 2 > 0$, što je ispunjeno na intervalima $(-\infty, -\sqrt{6}/6)$ i $(\sqrt{6}/6, +\infty)$. Funkcija je konkavna ako je $f''(x) = 12x^2 - 2 < 0$, što je ispunjeno na intervalu $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$.

Iz $f''(x) = 12x^2 - 2 = 0$ sledi $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}/6$, što znači da funkcija f ima moguće prevojne tačke $D(\sqrt{6}/6, -5/36)$ i $E(-\sqrt{6}/6, -5/36)$. Budući da, prema prethodnom, grafik funkcije menja svoju konkavnost u ovim tačkama, to su one zaista prevojne tačke funkcije f .

Primer 4.76. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{x-5}{x^2-9}$ (sl. 4.15).

7. Data funkcija nema asimptota.

1. Data funkcija je definisana na skupu $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

2. Data funkcija nije ni parna ni neparna.

3. Nula funkcije f je za $x = 5$. Iz $\frac{x-5}{x^2-9} > 0$, sledi da je $f(x) > 0$, za $x \in (-3, 3) \cup (5, +\infty)$, a $f(x) < 0$, za $x \in (-\infty, -3) \cup (3, 5)$.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \frac{-x^2 + 10x - 9}{(x^2 - 9)^2}$.

Prvi izvod funkcije f ima nule za $x = 1$ i $x = 9$.

Funkcija f raste za $-x^2 + 10x - 9 > 0$ i $x \neq \pm 3$, odnosno na intervalima $(1, 3)$ i $(3, 9)$.

Funkcija f opada za $-x^2 + 10x - 9 < 0$ i $x \neq \pm 3$, odnosno na intervalima $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ i $(9, +\infty)$.

5. Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = 2 \frac{(x^3 - 15x^2 + 27x - 45)}{(x^2 - 9)^3}$.

Kako je $f''(1) > 0$, to funkcija f ima lokalni minimum u tački $A(1, 1/2)$.

Kako je $f''(9) < 0$, to funkcija f ima lokalni maksimum u tački $B(9, 1/18)$.

6. Polinom $P(x) = x^3 - 15x^2 + 27x - 45$ ima jednu realnu nulu koju ćemo obeležiti sa x_0 . Pošto je $f''(13) < 0$ i $f''(14) > 0$, to tačka x_0 pripada intervalu $(13, 14)$; pokazaćemo da u tački $C(x_0, f(x_0))$ funkcija f ima prevojnu tačku.

Pokažimo da je funkcija f konkvexna (tj. $f''(x) > 0$) na intervalima $(-3, 3)$ i $(x_0, +\infty)$. Naime, za $x < x_0$ važi $P(x) < 0$, a takodje je $x^2 - 9 < 0$ za $x \in (-3, 3)$. Za $x > x_0$ je $P(x) > 0$ i $x^2 - 9 > 0$.

Funkcija f je konkavna za $f''(x) < 0$, tj. na intervalima $(-\infty, -3)$ i $(3, x_0)$.

Na osnovu prethodnog sledi da u tački C , sa apscisom $x_0 \in (13, 14)$, funkcija f ima prevojnu tačku.

7. Asimptote:

Funkcija ima dve vertikalne asimptote $x = -3$ i $x = 3$, jer važi

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = +\infty.$$

Takodje je $\lim_{x \rightarrow -3+0} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = -\infty$.

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ i kada $x \rightarrow +\infty$ i kada $x \rightarrow -\infty$, jer je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Funkcija nema kosu asimptotu.

Primer 4.77. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (sl. 4.16).

1. Data funkcija je definisana na intervalu $[-3, +\infty)$.
2. Funkcija f ima nule u tačkama $x_1 = 0$ i u $x_2 = -3$. $f(x) < 0$, $x \in (-3, 0)$, $f(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$.

$$3. \text{ Prvi izvod funkcije } f \text{ je } f'(x) = \frac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}.$$

4. Prvi izvod funkcije f ima nulu za $3x+6=0$, tj. za $x=-2$.

Funkcija f raste za $3x+6 > 0$, tj. na intervalu $(-2, +\infty)$, jer je $2\sqrt{x+3} > 0$ za svako $x > -3$.

Funkcija f opada za $3x+6 < 0$, tj. na intervalu $(-3, -2)$.

$$5. \text{ Drugi izvod funkcije je } f''(x) = \frac{3(x+4)}{4(x+3)^{3/2}}.$$

Kako je $f''(-2) > 0$ to je tačka $A(-2, -2)$ minimum funkcije.

6. Kako za $x > -3$ važi $f''(x) > 0$, to je data funkcija konveksna na skupu $(-3, +\infty)$.

7. Data funkcija nema asimptota.

Slika 4.16. $f(x) = x\sqrt{x+3}$.

Slika 4.17. $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

Primer 4.78. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ (sl. 4.17).

1. Data funkcija je definisana na skupu \mathbb{R} .
2. Data funkcija je periodična sa osnovnom periodom 2π , tako da je dovoljno ispitati njen tok i nacrtati grafik na intervalu $[0, 2\pi]$.

Funkcija f nije ni parna ni neparna.

3. Nule funkcije f su rešenja jednačine

$$2\sin x + \cos 2x = 0. \quad (4.47)$$

Kako je $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, to se jednačina (4.47) svodi na $1 + 2\sin x - 2\sin^2 x = 0$. Posle smene $t = \sin x$ dobija se jednačina $1 + 2t - 2t^2 = 0$, čija su rešenja $t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Kako je $t_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} > 1$, što je van skupa vrednosti funkcije $\sin x$, to možemo prihvatiti samo rešenje $t_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Na intervalu $[0, 2\pi]$ tražene nule funkcije f su u tačkama $x_1 \approx 5,91$ i $x_2 \approx 3,42$.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$.

Nule funkcije f' su za $\cos x = 0$ i za $\sin x = 1/2$, tj. (na intervalu $[0, 2\pi]$) to su $\pi/2, 3\pi/2, \pi/6$ i $5\pi/6$.

5. Drugi izvod funkcije je $f'' = -2\sin x - 4\cos 2x$.

Kako je $f''(\pi/2) = 2$, $f''(3\pi/2) = 6$, $f''(\pi/6) = -3$ i $f''(5\pi/6) = -3$, to su tačke $A(\pi/2, 1)$ i $B(3\pi/2, -3)$ lokalni minimumi, a tačke $C(\pi/6, 3/2)$ i $D(5\pi/6, 3/2)$ lokalni maksimumi funkcije f .

Primer 4.79. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = xe^x$ (sl. 4.18).

1. Data funkcija je definisana na skupu \mathbb{R} .
2. Funkcija f nije ni parna ni neparna.
3. Nula funkcije f je $x = 0$, $f(x) < 0$, $x < 0$, $f(x) > 0$, $x > 0$.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = (x+1)e^x$.

Prvi izvod funkcije f ima nulu za $x = -1$.

Funkcija f raste za $x > -1$.

Funkcija f opada za $x < -1$.

5. Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = (x+2)e^x$.

Kako je $f''(-1) > 0$, to data funkcija ima lokalni minimum u tački $A(-1, -1/e)$.

6. Funkcija je konveksna za $f''(x) > 0$, tj. na intervalu $(-2, +\infty)$.

Funkcija je konkavna na intervalu $(-\infty, -2)$.

Funkcija ima prevojnu tačku $B(-2, -2e^{-2})$.

7. Asimptote:

Data funkcija nema vertikalnih asimptota.

Funkcija f ima horizontalnu asimptotu $x = 0$ kada $x \rightarrow -\infty$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = - \lim_{t \rightarrow +\infty} te^{-t} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Slika 4.18. $f(x) = xe^x$.

Slika 4.19. $f(x) = xe^{-x^2}$.

Primer 4.80. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ (sl. 4.19).

1. Data funkcija je definisana na skupu \mathbb{R} .

2. Funkcija f je neparna, jer za sve $x \in \mathbb{R}$ važi

$$f(-x) = (-x) \cdot e^{(-x)^2} = -xe^{x^2} = -f(x).$$

3. Nula funkcije f je u $x = 0$, $f(x) < 0$, za $x < 0$, $f(x) > 0$, za $x > 0$.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$.

Prvi izvod funkcije f ima nule $x_1 = \sqrt{2}/2$ i $x_2 = -\sqrt{2}/2$.

Funkcija f raste na intervalu $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Funkcija f opada na intervalima $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ i $(\sqrt{2}/2, +\infty)$.

5. Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$.

Kako je $f''(\sqrt{2}/2) < 0$, to funkcija ima lokalni maksimum u tački $A(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}e^{-1/2}/2)$.

Kako je $f''(-\sqrt{2}/2) > 0$, to funkcija f ima lokalni minimum u tački $B(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}e^{-1/2}/2)$.

6. Funkcija f je konveksna na intervalima $(-\sqrt{3/2}, 0)$ i $(\sqrt{3/2}, +\infty)$.

Funkcija f je konkavna na intervalima $(-\infty, -\sqrt{3/2})$ i $(0, \sqrt{3/2})$.

Funkcija f ima prevojne tačke

$$C(0,0), D\left(\sqrt{3/3}, \sqrt{3/2}e^{-3/2}\right) \text{ i } E\left(-\sqrt{3/2}, -\sqrt{3/2}e^{-3/2}\right).$$

7. Asimptote:

Nema vertikalnih asimptota.

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ u $\pm\infty$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{-x^2} = 0.$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Primer 4.81. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = xe^{-1/x}$ (sl. 4.20).

1. Data funkcija je definisana na skupu $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Funkcija f nije ni parna ni neparna.

3. Funkcija f nema nula.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-1/x}}{x}$.

Prvi izvod funkcije f ima nulu za $x = -1$.

Funkcija f raste na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(0, +\infty)$. Funkcija f opada na intervalu $(-1, 0)$.

5. Tačka $A(-1, -e)$ je lokalni maksimum.

6. Drugi izvod funkcije je $f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{-1/x}$.

Funkcija je konveksna na intervalu $(0, +\infty)$.

Funkcija je konkavna na intervalu $(-\infty, 0)$.

Funkcija f nema prevojnih tačaka.

7. Asimptote:

Vertikalna asimptota je $x = 0$, jer važi

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} xe^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-1}{-\frac{1}{x^2}} e^{-1/x} = - \lim_{x \rightarrow 0-0} e^{-1/x} = -.$$

Sa druge strane je $\lim_{x \rightarrow 0+0} xe^{-1/x} = 0$.

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu.

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x - 1$ kada $x \rightarrow \pm \infty$, jer je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{xe^{-1/x}}{x} = 1.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (xe^{-1/x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{-1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x} = -1.$$

Primer 4.82. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{e^{x+2}}{x+1}$ (sl. 4.21).

1. Data funkcija je definisana na skupu $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
2. Funkcija f nije ni parna ni neparna.
3. Funkcija f nema nula, $f(x) < 0$, za $x < -1$, $f(x) > 0$, za $x > -1$.

$$4. \text{ Prvi izvod funkcije } f \text{ je } f'(x) = \frac{xe^{x+2}}{(x+1)^2}.$$

Prvi izvod funkcije f ima nulu za $x = 0$.

Funkcija f raste na intervalu $(0, +\infty)$

Funkcija f opada na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 0)$.

$$5. \text{ Drugi izvod funkcije je } f''(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3} e^{x+2}.$$

Kako je $f''(0) > 0$, to funkcija ima minimum u tački $A(0, e^2)$. Funkcija f je konkavna odozgo na $(-1, +\infty)$.

6. Funkcija f je konveksna na $(-\infty, -1)$.

Funkcija f nema prevojnih tačaka.

7. Asimptote:

Vertikalna asimptota je $x = -1$ i važi

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{e^{x+2}}{x+1} = - \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{e^{x+2}}{x+1} = + \quad .$$

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \rightarrow -\infty$, (negativna stranu x -ose), i važi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2}}{x+1} = + \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x+2}}{x+1} = 0.$$

Funkcija nema kosu asimptotu.

Primer 4.83. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = e^{2x/(1-x^2)}$, (sl. 4.22).

1. Data funkcija je definisana na skupu $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Funkcija f nije parna ni neparna.

3. Funkcija f nema nula.

4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} e^{2x/(1-x^2)}$.

Prvi izvod funkcije f nema realnih nula.

Funkcija f raste na intervalima $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, +\infty)$.

5. Konkavnost ostaje za samostalno vežbanje.

6. Asimptote:

Vertikalne asimptote su $x = -1$ i $x = 1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = + \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = + \quad .$$

Za ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije f važne su i sledeće dve granične vrednosti:

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{2x}{1-x^2}} = 0.$$

Slika 4.22. $f(x) = e^{2x/(1-x^2)}$ Slika 4.23. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.
Funkcija f ima horizontalnu asimptotu $y = 1$ kada $x \rightarrow \pm\infty$, jer je

Primer 4.84. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ (sl. 4.23).

7. Funkcija f nema kosu asimptotu.

1. Data funkcija je definisana za $\frac{1-x}{1+x} > 0$, odnosno za $|x| < 1$.
2. Funkcija f je neparna, jer je za $|x| < 1$

$$f(-x) = \ln \frac{1-(-x)}{1+(-x)} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x).$$

3. Funkcija f ima nulu za $x = 0$.
4. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = -\frac{2}{1-x^2}$.

Prvi izvod funkcije f nema nula.

Funkcija f opada na $(-1, 1)$.

5. Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = -\frac{4x}{(1-x^2)^2}$.

Funkcija f je konveksna na $(-\infty, 0)$.

Funkcija f je konkavna na $(0, +\infty)$.

Funkcija f ima prevojnu tačku $O(0, 0)$.

6. Funkcija f ima vertikalne asimptote $x = -1$ i $x = 1$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1-x}{1+x} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{1+x} = -\infty.$$

Primer 4.85. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \frac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}$, (sl. 4.24).

Data funkcija se može definisati i na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+4}}, & x \leq 2, \\ f_2(x) = \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+4}}, & x > 2. \end{cases}$$

1. Domen je skup \mathbb{R} .
2. Funkcija $f_1(x)$ ima nulu $x = 2$, dok funkcija $f_2(x)$ nema nula.

3. Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = -\frac{2}{3} \frac{x+2}{(x^2+4)^{3/2}}, & x < 2, \\ f_2'(x) = \frac{2}{3} \frac{x+2}{(x^2+4)^{3/2}}, & x > 2. \end{cases}$$

Prvi izvod funkcije f_1 ima nulu za $x = -2$, dok prvi izvod funkcije f_2 nema nula. Međutim, funkcija f nema izvod u tački $x = 2$; prema teoremi 4.8, u toj tački takođe može biti lokalni ekstrem funkcije.

Funkcija f_1 raste na intervalu $(-\infty, -2)$.

Funkcija f_1 opada na intervalu $(-2, 2)$.

Funkcija f_2 raste na intervalu $(2, +\infty)$.

4. Kako je funkcija f' negativna sa leve, a pozitivna sa desne strane tačke $x = 2$, to u tački $x = 2$ funkcija f ima lokalni minimum.

5. Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2+3x-2}{(x^2+4)^{5/2}}, & x < 2 \\ f_2''(x) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{x^2+3x-2}{(x^2+4)^{5/2}}, & x > 2. \end{cases}$$

6. Nule funkcije f_1'' su tačke

$$x_1 = -\frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx -3,56 \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{3-\sqrt{17}}{2} \approx 0,56.$$

Funkcija f_1 je konveksna na intervalima $(-\infty, x_1)$ i $(x_2, 2)$.

Funkcija f_1 je konkavna na intervalu (x_1, x_2) .

Funkcija f_1 ima prevojne tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$.

Za $x > 2$ je $f_2''(x) < 0$, pa je funkcija f_2 konkavna na $(2, +\infty)$.

7. Asimptote

Funkcija f nema vertikalnu asimptotu.

Funkcija f ima horizontalnu asimptotu $y = 1/3$ kada $x \rightarrow \pm\infty$, jer je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+4}} = 1/3 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+4}} = 1/3.$$

Funkcija f nema kosu asimptotu.

Slika 4.24. $f(x) = \frac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}$.

Slika 4.25. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

Primer 4.86. Ispitaćemo tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$ (sl. 4.25).

1. Data funkcija je definisana na skupu \mathbb{R} .
2. Data funkcija je parna.
3. Funkcija f nema nula, i važi $f(x) < 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

4. Prvi izvod funkcije je $f'(x) = \frac{2\sqrt[3]{(x^2+1)^2} - \sqrt[3]{x^4}}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$, $x \neq 0$.

Funkcija f opada na $(-\infty, 0)$, a raste za $(0, +\infty)$,

5. U tački $x = 0$ prvi izvod funkcije f ne postoji, Međutim, funkcija f ima minimum u tački $x = 0$, jer, kako smo u prethodne dve tačke već videli, levo od tačke 0 funkcija f' je negativna, a desno od nje je pozitivna. Primitimo da je tangenta grafika u tački $x = 0$ normalna na x -osu.

6. Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = -\frac{2\sqrt[3]{(x^2+1)^5} + 3\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^{10}}}{9\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{(x^2+1)^5}}$, $x \neq 0$.

Funkcija f'' je negativna za sve $x \neq 0$, pa je funkcija f konkavna na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, i nema prevojnu tačku.

7. Asimptote

Funkcija f nema vertikalne asimptote.

Funkcija f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \rightarrow \pm\infty$, jer je

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1})(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2})}{(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^2+1)^2})} = 0. \end{aligned}$$

Funkcija f nema kosu asimptotu.

Glava 5

Neodređeni integral

5.1 Definicija i osnovne osobine

Posmatrajmo funkciju $f(x) = 4x^3, x \in \mathbb{R}$. Postavlja se pitanje da li za funkciju $f(x) = 4x^3$ postoji funkcija F čiji bi izvod bio baš jednak $4x^3$, tj. $F'(x) = 4x^3$. Lako možemo naći jednu takvu funkciju, recimo takva je funkcija x^4 , jer je $(x^4)' = 4x^3$. Prethodni primer nam daje motivaciju za sledeću opštu definiciju.

Definicija 5.1. Funkcija $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je primitivna funkcija za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ ako važi

$$(\forall x \in (a, b)) \quad F'(x) = f(x). \quad (5.1)$$

U prethodnom primeru, funkcija $F(x) = x^4$ je jedna primitivna funkcija za funkciju $f(x) = 4x^3$.

Primer 5.1. Za funkciju $f(x) = -\sin x$ jedna njena primitivna funkcija je $F(x) = \cos x$ nad intervalom $(-\infty, +\infty)$.

Iz Lagranžove teoreme 4.12 sledi da se bilo koje dve primitivne funkcije koje odgovaraju jednoj neprekidnoj funkciji razlikuju najviše za konstantu.

Primer 5.2. Sve primitivne funkcije za funkciju $f(x) = -\sin x$ su date sa $\cos x + C$, gde je C proizvoljna realna konstanta.

Definicija 5.2. Neodređeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ je skup svih njenih primitivnih funkcija.

Neodređeni integral funkcije f označavamo sa $\int f(x) dx$, i čitamo "integral od ef od iks de iks". Zbog toga, ako važi jednakost (5.1), pišaćemo u nastavku

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (5.2)$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Fundamentalna je činjenica da svaka neprekidna funkcija na intervalu ima primitivnu funkciju na tom intervalu.

Ako je funkcija f diferencijabilna nad intervalom (a, b) , tada je po definiciji neodređenog integrala

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

5.2 Tablica integrala nekih osnovnih elementarnih funkcija

Tablica osnovnih neodređenih integrala se može dobiti iz odgovarajuće tablice prvih izvoda i primenom osnovnih pravila za izvod funkcije nad njihovim prirodnim definicionim skupovima. Ostavljamo čitaocu da odredi *najveće* skupove u \mathbb{R} na kojima ove jednakosti važe. Realni parametar a je pozitivan u integralima 8)-12).

$$\begin{array}{ll} 1) \int x dx = \frac{x^{+1}}{+1} + C, \quad \neq -1; & 2) \int x^{-1} dx = \ln|x| + C; \\ 3) \int \sin x dx = -\cos x + C; & 4) \int \cos x dx = \sin x + C; \\ 5) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, & 6) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \\ 7) \int e^x dx = e^x + C; & 8) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1; \\ 9) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; & 10) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C; \\ 11) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C; & 12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C. \end{array}$$

Pokazaćemo samo drugu jednakost. Naime, za $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, a takođe za $x < 0$ važi

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Zato za $x \neq 0$ važi $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

5.3 Osnovne osobine neodređenog integrala

Na osnovu osobina prvog izvoda lako se pokazuje da je integral linearna operacija, tj. da važi sledeća teorema.

Teorema 5.1. Za funkcije f i g za koje postoje neodređeni integrali nad intervalom I važi

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx; \quad a \neq 0.$

Dokaz.

1. Neka je

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2,$$

gde su F i G primitivne funkcije za f , odnosno g . Kako je

$$(F(x) + C_1 + G(x) + C_2)' = f(x) + g(x),$$

to su sa $F(x) + G(x) + C$ (za $C = C_1 + C_2$, jer su sve to proizvoljne konstante) date sve primitivne funkcije za $f(x) + g(x)$, te je

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= F(x) + G(x) + C = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 \\ &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \end{aligned}$$

2. Za proizvoljan realan broj a važi

$$(aF(x) + C_1)' = aF'(x) = af(x),$$

pa je $aF(x)$ primitivna funkcija za $af(x)$, tj.

$$\int a \cdot f(x) dx = aF(x) + C = a \cdot \int f(x) dx; \quad \square$$

Primer 5.3. Važi

$$\begin{aligned} \int (5x^3 - x + 5) dx &= \int 5x^3 + \int (-x) dx + \int 5 dx = 5 \int x^3 - \int x dx + 5 \int dx \\ &= \frac{5}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} + 5x + C, \end{aligned}$$

(konstante vezane za svaki od integrala su proizvoljne, pa je njihov zbir takođe konstanta).

Primer 5.4. Imamo da je

$$\begin{aligned} \int \frac{(5\sqrt[3]{x} - 2x^3 e^x - 3x^2)}{x^3} dx &= \int \left(5x^{-8/3} - 2e^x - \frac{3}{x} \right) dx \\ &= 5 \int x^{-8/3} - 2 \int e^x dx - 3 \int \frac{dx}{x} dx \\ &= 5 \left(-\frac{3}{5} \right) x^{-5/3} - 2e^x - 3 \ln|x| + C. \end{aligned}$$

5.4 Smena promenljive u neodređenom integralu

Oblik podintegralne funkcije i pravilo za izvod složene funkcije često dozvoljava svođenje datog integrala na jednostavniji integral.

Ako je funkcija f neprekidna nad intervalom $[a, b]$ i neka je F njena primitivna funkcija tj. $F'(x) = f(x)$. Neka je neka druga funkcija $x = (t)$ neprekidno diferencijabilna (njen izvod je neprekidna funkcija) na intervalu $[,]$ i neka važi $a \leq (t) \leq b, \leq t \leq b$. Tada je definisana složena funkcija $F((t))$ nad intervalom $[,]$. Na osnovu pravila za izvod složene funkcije važi

$$\frac{dF((t))}{dt} = F((t)) '(t), \text{ tj. } \frac{dF((t))}{dt} = f((t)) '(t),$$

jer je $F'(x) = f(x)$. To znači da je $F((t))$ primitivna funkcija za funkciju $f((t)) '(t)$, pa je

$$\int f((x)) '(t) dt = F((t)) + C.$$

Kako je $\int f(x) dx = F(x) + C$, to iz prethodne jednakosti sledi

$$\int f(x) dx = \int f((x)) '(t) dt.$$

Primer 5.5. Integral $\int \frac{-6x dx}{\sqrt{1-3x^2}}$ rešava se takođe smenom $t = 1 - 3x^2, dt = -6x dx$, i dobija se

$$\int \frac{-6x dx}{\sqrt{1-3x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{1-3x^2} + C.$$

Primer 5.6. Izračunaćemo $\int \frac{dx}{x+a}$ za fiksni realan broj a . Koristimo smenu $t = x+a$, $dt = dx$,

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C.$$

Primer 5.7. Izračunaćemo $\int (bx+a)^n$, gde je n realan broj, $n \neq -1$, a a i b su dati realni brojevi, $b \neq 0$. Koristimo smenu $t = bx+a$, $dt = b dx$, $dx = \frac{1}{b} dt$ i dobijamo

$$\int (bx+a)^n dx = \int \frac{t^n}{b} dt = \frac{1}{b} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{b} \cdot \frac{(bx+a)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Primer 5.8. Integral $\int (x^3+3)^2 3x^2 dx$ rešava se smenom $t = x^3+3$, $dt = 3x^2 dx$. Imamo

$$\int (x^3+3)^2 3x^2 dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^3+3)^3}{3} + C.$$

Primer 5.9. Integral $\int \sqrt{x^2-3x^4} dx$ rešava se smenom $t = 1-3x^2$, $dt = -6x dx$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-3x^4} dx &= \int x\sqrt{1-3x^2} dx = \frac{-1}{6} \int t^{1/2} dt = \frac{-1}{9} t^{3/2} + C \\ &= -\frac{1}{9} (1-3x^2)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Primer 5.10. Izračunaćemo $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, gde su a , b i c realni brojevi.

Kvadratni trinom iz imenioca ax^2+bx+c ćemo svesti na oblik u^2+A , gde je A konstanta.

$$ax^2+bx+c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + A. \quad (5.3)$$

U (5.3) je $A = \frac{4ac-b^2}{4a}$, pa se dati integral može zapisati kao

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + A}.$$

Ako sada uvedemo smenu $t = x + \frac{b}{2a}$, $dt = dx$, tada imamo

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dt}{at^2 + A}.$$

Ako je $A/a > 0$, tada je

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{A} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{A/a}}\right)^2 + 1},$$

pa se smenom $u = \frac{t}{\sqrt{A/a}}$, $du = \sqrt{a/A} dt$, tj. $dt = \sqrt{A/a} du$, prethodni integral svodi na tablični integral

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{aA}} \int \frac{dx}{u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{aA}} \operatorname{arctg} u + C.$$

Tako dobijamo za $A/a > 0$:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{aA}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{A/a}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{aA}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{A/a}} \right) + C.$$

Ako je $A/a < 0$, tada se dati integral svodi na

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + A/a} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 - B^2},$$

gde je $B = \sqrt{-A/a} > 0$.

Primer 5.11. Izračunaćemo $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 31}$. Ovo je poseban slučaj prethodnog primera, te je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 10x + 31} &= \int \frac{dx}{(x^2 + 10x + 25) + 6} = \int \frac{dx}{(x^2 + 10x + 5^2) + 6} \\ &= \int \frac{dx}{(x+5)^2 + 6} = \int \frac{dx}{((x+5)^2 + (\sqrt{6})^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{\sqrt{6}} + C. \end{aligned}$$

(Smena $t = x + 5$, $dt = dx$.)

Primer 5.12. Izračunaćemo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 31}}$. Analogno kao u prethodnom slučaju, imamo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 31}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 10x + 25) + 6}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^2 + 6}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+5}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1}} = \ln \left| \frac{x+5}{\sqrt{6}} + \sqrt{\left(\frac{x+5}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1} \right| + C \\ &= \ln \left| x+5 + \sqrt{x^2 + 10x + 31} \right| - \ln(\sqrt{6}) + C \\ &= \ln \left| x+5 + \sqrt{x^2 + 10x + 31} \right| + C. \end{aligned}$$

(Smena $t = \frac{x+5}{\sqrt{6}}$, $dt = \frac{1}{\sqrt{6}} dx$.)

Primer 5.13. Izračunaćemo $\int \sqrt{r^2 - x^2} dx$, gde je $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Smenom $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = r^2 \int \cos^2 t dt = \frac{r^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{r^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \sqrt{r^2 - x^2} \right) + C, \end{aligned}$$

jer je $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$.

5.5 Parcijalna integracija

Izložićemo još jednu metodu za izračunavanje neodređenog integrala. Neka su date funkcije u i v diferencijabilne funkcije po promenljivoj x , tada važi

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Integraleći ovu jednakost dobijamo *formulu parcijalne integracije*

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du.} \quad (5.4)$$

Primer 5.14. Primenom parcijalne integracije izračunaćemo integral $\int xe^x dx$.

Ako je $u = x$, $dv = e^x dx$, tada je $du = dx$, $v = e^x$, pa je na osnovu (5.4)

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Ostavljamo čitaocu da proveri da bi izborom $u = e^x$, $dv = x dx$, dobili

$$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,$$

dakle još komplikovaniji integral od polaznog, te ova parcijalna integracija ne bi dovela do rešenja.

Primer 5.15. Primenom parcijalne integracije izračunaćemo integral $\int x \sin x dx$.

Ako je $u = x$, $dv = \sin x dx$, tada je $du = dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$, pa je

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ako bi uzeli $u = \sin x$ i $dv = x dx$, tj. $du = \cos x dx$ i $v = x^2/2$, dobili bi

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx,$$

pa, kao i u primeru 5.14, ovakav izbor funkcije u (a time i diferencijala dv) ne bi omogućio izračunavanje datog neodređenog integrala.

Primetimo, da kada je za neko $k \in \mathbb{N}$ podintegralna funkcija proizvod oblika $x^k e^x$, $x^k \sin x$ ili $x^k \cos x$, tada prilikom parcijalne integracije treba uzeti $u = x^k$.

Primer 5.16. Primenom parcijalne integracije izračunaćemo integral $\int \arcsin x dx$.

Ako je $u = \arcsin x$, $dv = dx$, tada je $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$, pa je

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

U poslednjem integralu smo koristili smenu $t = 1 - x^2$, odakle sledi $dt = -2x dx$.

Treba primetiti da se u navedenim primerima određivanje integrala svodi na izražavanje preko elementarnih funkcija, odnosno u konačnom obliku. Postavlja se pitanje:

Da li je u slučaju postojanja neodređenog integrala (primitivne funkcije) uvek moguće da se on izrazi preko elementarnih funkcija?

Nažalost, odgovor je negativan. Integrali kao

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{x^2} dx \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

se ne mogu izraziti u konačnom obliku.

Zato je od interesa odrediti što šire klase funkcija čiji se integrali mogu izraziti u konačnom obliku. Takva jedna važna klasa funkcija su racionalne funkcije.

5.6 Integrali racionalnih funkcija

Navešćemo sada neke osobine racionalnih funkcija koje će biti od važnosti za njihovu integraciju. Posmatrajmo racionalnu funkciju

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \quad (5.5)$$

gde su Q_m i $P_n(x)$ polinomi stepena m i n , respektivno. U slučaju da je $m \geq n$ racionalnu funkciju $R(x)$ uvek možemo zapisati u obliku

$$R(x) = p(x) + \frac{r_k(x)}{P_n(x)}, \quad (5.6)$$

gde je $p(x)$ polinom stepena $m - n$ dobijen deljenjem polinoma $Q_m(x)$ sa polinomom $P_n(x)$, a $r_k(x)$ je polinom stepena $k < n$ (ostatak pri deljenju). Iz (5.6) sledi jednakost

$$\int R(x) dx = \int p(x) dx + \int \frac{r_k(x)}{P_n(x)} dx,$$

iz koje vidimo da se problem izračunavanja integrala racionalne funkcije svodi na problem izračunavanja integrala "prave" racionalne funkcije $\frac{r_k(x)}{P_n(x)}$ (jer je $k < n$). Zato u (5.5) možemo pretpostaviti da je $m < n$.

Osnovna ideja integracije racionalne funkcije se svodi na integraciju elementarnih racionalnih funkcija na koje se racionalna funkcija može rastaviti. Oblici elementarnih funkcija koja se pojavljuju u tom rastavljanju zavise od karaktera nula polinoma $P_n(x)$.

Na osnovu osnovnog stava algebre da svaki polinom ima bar jednu nulu, sledi da polinom $P_n(x)$ stepena n ima tačno n nula u polju kompleksnih brojeva. Te nule mogu biti:

- 1) realne jednostruke;
- 2) realne višestruke;
- 3) kompleksne jednostruke;
- 4) kompleksne, višestruke.

U prvom slučaju, kada su *nule polinoma P_n realne jednostruke*, racionalna funkcija je zbir elementarnih racionalnih funkcija

$$\frac{A}{x-a},$$

gde je a jedna od realnih nula polinoma P_n , a A konstanta. Integracija se u ovom slučaju svodi na

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C. \quad (5.7)$$

Primer 5.17. Izračunaćemo integral $\int \frac{(x^3 - 2x - 35) dx}{x^2 - 2x - 15}$.

Na osnovu relacija

$$\frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} = x + 2 + \frac{17x - 5}{x^2 - 2x - 15}$$

i $x^2 - 2x + 15 = (x - 5)(x + 3)$ sledi da je

$$\frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} = x + 2 + \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3},$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti. Pomoću metode neodređenih koeficijenta dobija se sistem jednačina

$$A + B = 17, \quad 3A - 5B = -5, \quad \text{čije je rešenje } A = 10, B = 7,$$

pa je

$$\frac{x^3 - 2x - 35}{x^2 - 2x - 15} = x + 2 + \frac{10}{x-5} + \frac{7}{x+3}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^3 - 2x - 35) dx}{x^2 - 2x - 15} &= \int (x + 2) dx + \int \frac{10 dx}{x-5} + \int \frac{7 dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} + 2x \\ &+ 10 \ln|x-5| + 7 \ln|x+3| + C = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|(x-5)^{10} \cdot (x+3)^7| + C. \end{aligned}$$

U drugom slučaju, kada su *nule polinoma* P_n *realne višestruke*, racionalna funkcija je zbir elementarnih racionalnih funkcija

$$\frac{A_j}{(x-a)^j}, \quad j = 1, \dots, k,$$

gde je a jedna od realnih višestrukih (k -tostruka, $k > 1$) nula polinoma P_n . Integracija se u ovom slučaju svodi na integrale oblika (5.7) i integrale

$$\int \frac{dx}{(x-a)^j} = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + C, \quad j = 2, \dots, k.$$

Primer 5.18. Odredićemo integral $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3}$.

Data podintegralna funkcija se rastavlja na sledeći način na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + D}{(x-1)^3} \\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + D}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Kako je $x^2+1 = Ax^2 + x(B-2A) + A-B+D$, to se izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene x dobija sistem jednačina

$$A = 1, \quad -2A + B = 0, \quad A - B + D = 1, \quad \text{čija su rešenja } A = 1, \quad B = 2, \quad D = 2.$$

Tako dobijamo

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Oдавde je

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3} &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{(x-1)^2} + \int \frac{2dx}{(x-1)^3} \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

U trećem slučaju, kada su *nule polinoma* P_n *kompleksne jednostruke* racionalna funkcija se rastavlja na zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad (5.8)$$

gde su p i q realni brojevi takvi da je

$$q - p^2/4 > 0,$$

jer su nule kompleksni brojevi. Naime, primetimo da ako je $+i$ kompleksna nula polinoma P_n , tada je konjugovano kompleksni broj $-i$ takođe nula tog polinoma. Množeći dva faktora u razvoju polinoma $P_n(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ koji odgovaraju ovim kompleksnim nulama dobijamo

$$(x - -i)(x - +i) = (x -)^2 + ^2 = x^2 + px + q.$$

Integracija izraza (5.8) se, koristeći kanonički oblik kvadratnog polinoma

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right),$$

smenom $t = x + \frac{p}{2}$ svodi na

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{At+(B-Ap/2)}{t^2+a^2} dt = A \int \frac{t}{t^2+a^2} dt + (B-Ap/2) \int \frac{dt}{t^2+a^2},$$

gde smo stavili $a^2 = q - p^2/4$. Prvi integral sa desne strane jednakosti se rešava smenom $u = t^2 + a^2$, te se dobija za vrednost ovog integrala $\frac{1}{2} \ln(t^2 + a^2)$, dok je drugi integral tablični sa vrednošću $\frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{a}\right)$.

Primer 5.19. Odredićemo integral $\int \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} dx$. Iz jednakosti

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} &= \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{D}{2x-1} = \frac{(Ax+B)(2x-1) + D(x^2+4)}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} \\ &= \frac{(2A+D)x^2 + (-A+2B)x - B + 4D}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} \end{aligned}$$

dobija se sistem jednačina

$$2A+D=1, \quad -A+2B=-1, \quad -B+4D=-21, \quad \text{odakle je } A=3, \quad B=1, \quad D=-5.$$

Prema tome, važi

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x+1}{x^2+4} + \frac{5}{2x-1},$$

pa je

$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2 - x - 21) dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} &= \int \frac{(3x+1) dx}{x^2+4} + \int \frac{5 dx}{2x-1} = \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+4} \\ &+ \int \frac{dx}{x^2+4} + \int \frac{5 dx}{2x-1} = \frac{3}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{5}{2} \ln|2x-1| + C. \end{aligned}$$

U četvrtom slučaju, kada su nule polinoma P_n kompleksne višestruke (k -tostruke, $k > 1$), racionalna funkcija se rastavlja na zbir elementarnih racionalnih funkcija oblika

$$\frac{A_j x + B_j}{(x^2 + px + q)^j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (5.9)$$

gde su p i q realni brojevi takvi da je $q - p^2/4 > 0$, jer su nule kompleksni brojevi. Integracija izraza (5.9) se na osnovu kanoničkog oblika kvadratnog polinoma

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$$

smenom $t = x + \frac{p}{2}$ svodi na

$$\begin{aligned} \int \frac{A_j x + B_j}{(x^2 + px + q)^j} dx &= \int \frac{A_j t + (B_j - A_j p/2)}{(t^2 + a^2)^j} dt \\ &= A_j \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^j} dt + (B_j - A_j p/2) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^j}, \end{aligned}$$

gde smo stavili $a^2 = q - p^2/4$.

Prvi integral sa desne strane jednakosti se rešava smenom $u = t^2 + a^2$, te se dobija za vrednost ovog integrala (primer 5.10)

$$\frac{1}{2(1-j)} (t^2 + a^2)^{-j+1}.$$

Da bismo rešili drugi integral, uvedimo oznaku

$$I_j = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Primenimo na I_j parcijalnu integraciju. Tako dobijamo

$$\begin{aligned} I_j &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^j} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^j} + 2j \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{j+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^j} + 2j \int \frac{(t^2 \pm a^2) dt}{(t^2 + a^2)^{j+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^j} + 2j I_j - 2j a^2 I_{j+1}. \end{aligned}$$

Odavde sledi rekurentna formula za I_j :

$$I_{j+1} = \frac{t}{2j a^2 (t^2 + a^2)^j} + \frac{2j-1}{2j a^2} I_j. \quad (5.10)$$

Kako je

$$I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C,$$

iz formule (5.10) lako izračunavamo I_2 :

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Sada I_2 zamenjujemo u formulu (5.10) pa izračunavamo I_3 , itd.

Primer 5.20. Odredićemo integral $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$.

Na osnovu relacije

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

dobijamo

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + D)(x^2 + 1) + (Ex + F)(x - 2).$$

Iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} A + B &= 0, & -2B + D &= 0, & 2A + B - 2D + E &= 2, \\ -2B + D - 2E + F &= 2, & A - 2D - 2F &= 13, \end{aligned}$$

dobijamo

$$A = 1, \quad B = -1, \quad D = -2, \quad E = -3, \quad F = -4.$$

Prema tome imamo

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Na osnovu (5.10) imamo

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} &= \int \frac{1}{x-2} - \int \frac{x+2}{x^2+1} - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{3x-4}{x^2+1} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

5.7 Integrali trigonometrijskih funkcija

Integral $\int R(\sin x, \cos x) dx$, gde je R racionalna funkcija (od dve promenljive) po $\sin x$ i $\cos x$, se smenom

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{odakle je } dx = \frac{2 dt}{1+t^2}, \quad (5.11)$$

svodi na integral racionalne funkcije, jer je

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (5.12)$$

Primer 5.21. Izračunaćemo integral $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$ korišćenjem smene (5.11) i jednakosti (5.12).

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t-1+t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{dt}{t} - \frac{dt}{1+t} \right) = \ln|t| - \ln|1+t| + C \\ &= \ln \left| \frac{t}{1+t} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}(x/2)} \right| + C. \end{aligned}$$

Napomena. U primeru 5.12 imali smo integral $\int \cos^2 x dx$ koji smo rešavali tako što smo koristili identitet $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Analogno se rešavaju integrali funkcija $\sin^{2k} x$ i $\cos^{2k} x$, $k \in \mathbb{N}$.

Primer 5.22. Izračunaćemo integral $\int \sin^4 2x dx$. Polazeći od jednakosti $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, imamo

$$\begin{aligned} \int \sin^4 2x dx &= \int \left(\frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \int \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \sin 8x \right) + C \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

Napomena. Integrali $\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$ $m, n \in \mathbb{N}$, se pomoću relacije $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ svode na integrale $\int \cos^{2k} x dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Integrali oblika $\int \sin^{2k+1} x dx$, $k \in \mathbb{N}$, se rešavaju na sledeći način. Prvo se izvrši transformacija

$$\int \sin^{2k+1} x dx = \int \sin^{2k} x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x dx,$$

a zatim uvede smena $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$ i dobija se

$$\int \cos^{2k+1} x dx = - \int (1 - t^2)^k dt.$$

Analogno se rešavaju i integrali oblika $\int \cos^{2k+1} x dx$, $k \in \mathbb{N}$.

Primer 5.23. Izračunaćemo integral $\int \cos^5 x dx$.

U ovom slučaju je

$$\int \cos^5 x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx.$$

Smenom $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, dobijamo

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C \\ &= \sin x - \frac{2 \sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Analogno kao u prethodnom primeru se rešavaju i integrali

$$\int \sin^{2n+1} x \cos^m x dx, \quad \int \cos^{2n+1} x \sin^m x dx, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Primer 5.24. Izračunaćemo integral $\int \cos^2 x \sin^3 x dx$. Smenom $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, dobijamo

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^3 x dx &= \int \cos^2 x (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int t^2 (1 - t^2) dt \\ &= - \int (t^2 - t^4) dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C \\ &= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

Napomena. Mogu se dokazati sledeće rekurentne formule ($m, n \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int \sin^m x \cos^{n+2} x dx, \quad n \neq -1, \\ \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^n x dx, \quad m \neq -1 \\ \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx, \quad m+n \neq 0, \\ \int \sin^m x \cos^n x dx &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx, \quad m+n \neq 0.\end{aligned}$$

Primer 5.25. Integral

$$I_n = \int \cos^n x dx, \quad n \geq 2,$$

može zapisati kao $I_n = \int \cos^{n-1} x \cos x dx$. Primenom parcijalne integracije:

$u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x dx$, odakle je $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx$ i $v = \sin x$, dobija se

$$\begin{aligned}I_n &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx.\end{aligned}$$

Na osnovu toga dobijamo rekurentnu formulu

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (5.13)$$

Za $n=0$ je $I_0 = \int \sin^0 x dx = x + C$, a za $n=1$ je $I_1 = \int \sin^1 x dx = \cos x + C$.

Primetimo da su to polazni integrali za formulu (5.13), i to resp. za parno n ($n=2k$) i neparno n ($n=2k+1$).

Napomena. Integrali oblika

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx, \quad \int \sin(ax) \sin(bx) dx, \quad \int \cos(ax) \cos(bx) dx,$$

rešavaju se korišćenjem formula

1. $\sin \cdot \sin = \frac{1}{2} (\cos(\quad - \quad) - \cos(\quad + \quad)),$
2. $\sin \cdot \cos = \frac{1}{2} (\sin(\quad + \quad) + \sin(\quad - \quad)),$

$$3. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Primer 5.26. Integral $\int \sin 4x \cos 2x dx$ se može zapisati kao

$$\int \sin 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C.$$

5.8 Integrali iracionalnih funkcija

Integrali oblika

$$\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx,$$

gde je R racionalna funkcija $n + 1$ promenljive, a $\frac{p_i}{q_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ razlomci, rešavaju se smenom $x = t^m$, gde je m najmanji zajednički sadržalac imenilaca razlomaka $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$, odnosno

$$m = n.z.s.\{q_1, q_2, \dots, q_n\}.$$

Navedeni integral se svodi na integral racionalne funkcije po t . Na primer, u integralu

$$\int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} dx = \int \frac{1 + x^{1/3}}{x^{1/3} + x^{1/5}} dx$$

se uvodi smena

$$x = t^{15}, \quad dx = 15t^{14} dt, \quad (5.14)$$

jer je $\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{5}$. Dakle, $m = n.z.s.\{3, 5\} = 15$, odakle, korišćenjem smene (5.14), dobijamo:

$$\int \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} dx = \int \frac{1 + t^5}{t^5 + t^3} 15t^{14} dt = 15 \int \frac{t^{14} + t^{19}}{t^3(1 + t^2)} dt,$$

što je integral racionalne funkcije po t .

Integrali oblika

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx,$$

gde je $ad - bc \neq 0$, izračunavaju se tako što se uvodi smena

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad m = n.z.s.\{q_1, q_2, \dots, q_n\}.$$

Primer 5.27. Izračunavamo integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

Smenom $t = \sqrt{x+1}$, tj. $t^2 = x+1$, $2t dt = dx$, dobija se

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} &= \int \frac{2t dt}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C \\ &= 2\sqrt{x+1} - 2\ln|\sqrt{x+1}+1| + C. \end{aligned}$$

Primer 5.28. Izračunavamo integral $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1}$.

Smenom $t = \sqrt[3]{2x+3}$, tj. $t^3 = 2x+3$, $3t^2 dt = 2 dx$, dobija se

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+3}+1} &= \frac{3}{2} \int \frac{t^2 dt}{t+1} = \frac{3}{2} \int \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{(\sqrt[3]{2x+3})^2}{2} - \sqrt[3]{2x+3} + \ln|1 + \sqrt[3]{2x+3}| \right) + C. \end{aligned}$$

5.9 Metod Ostrogradskog

Integrali oblika

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx,$$

gde su $a \neq 0$, b i c dati brojevi, a $P_n(x)$ polinom stepena n , se rešavaju metodom Ostrogradskog¹. Ta se metoda zasniva na sledećoj jednakosti, a dobija se primenom parcijalne integracije:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (5.15)$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n-1$ sa neodređenim koeficijentima, a konstanta. Koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ i konstanta se određuju diferenciranjem jednakosti (5.15).

Primer 5.29. Izračunavamo integral $\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

U ovom slučaju je

$$\int \frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

¹M. Ostrogradski (1801–1862)

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$\frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = A\sqrt{x^2 + x + 1} + (Ax + B)\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Množenjem leve i desne strane sa $2\sqrt{x^2 + x + 1}$ dobija se

$$2(x^2 + x + 2) = 2A(x^2 + x + 1) + (Ax + B)(2x + 1) + 2,$$

odakle se izjednačavanjem koeficijenata dobija sistem jednačina

$$2 = 4A, \quad 2 = 3A + 2B, \quad 4 = 2A + B + 2,$$

čije je rešenje $A = 1/2$, $B = 1/4$ i $C = 11/8$.

Prema tome je

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{11}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Poslednji integral se transformiše na sledeći način:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}},$$

što posle smene $t = x + 1/2$, $dt = dx$, postaje

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| (2x + 1) + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

Na kraju je

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{11}{8} \ln \left| (2x + 1) + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C.$$

Primer 5.30. Izračunaćemo integral $\int \frac{x^3 + 3x}{\sqrt{5 - x^4 - 2x^2}} dx$.

Smenom $t = x^2$, $dt = 2x dx$, dobija se

$$\int \frac{x^3 + 3x}{\sqrt{5 - x^4 - 2x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t + 3}{\sqrt{5 - t^2 - 2t}} dt.$$

Stavimo sada

$$\int \frac{t + 3}{\sqrt{5 - t^2 - 2t}} dt = A\sqrt{5 - t^2 - 2t} + \int \frac{dt}{\sqrt{5 - t^2 - 2t}}.$$

Posle diferenciranja poslednje jednakosti po t dobija se

$$\frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}} = A \frac{-2t-2}{2\sqrt{5-t^2-2t}} + \frac{1}{\sqrt{5-t^2-2t}},$$

odakle je $t+3 = -A(t+1) +$. Sledi da je $A = -1$, $= 2$. Dakle,

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}} dt = -\sqrt{5-t^2-2t} + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2-2t}}.$$

Zadnji integral se rešava tako što se imenilac napiše kao $\sqrt{5-t^2-2t} = \sqrt{6-(t+1)^2}$, te je

$$\int \frac{t+3}{\sqrt{5-t^2-2t}} dt = -\sqrt{5-t^2-2t} + 2 \arcsin \frac{t+1}{\sqrt{6}} + C.$$

Konačno je

$$\int \frac{x^3+3x}{\sqrt{5-x^4-2x^2}} dx = -\sqrt{5-x^4-2x^2} + 2 \arcsin \frac{x^2+1}{\sqrt{6}} + C.$$

Primer 5.31. Izračunavamo integral $\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$.

Smenom $t = e^x$, $dt = e^x dx$, dobija se

$$\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^{2x} + e^x + 1}{\sqrt{e^{2x}-1}} e^x dx = \int \frac{t^2 + t + 1}{\sqrt{t^2-1}} dt.$$

Dakle,

$$\int \frac{t^2+t+1}{\sqrt{t^2-1}} dt = (At+B)\sqrt{t^2-1} + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Posle diferenciranja zadnje jednakosti dobija se

$$\frac{t^2+t+1}{\sqrt{t^2-1}} = A\sqrt{t^2-1} + (At+B)\frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Sređivanjem se dobija $A = 1/2$, $B = 1$ i $= 3/2$, pa je

$$\int \frac{e^{3x} + e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \left(\frac{e^x}{2} + 1\right) \sqrt{(e^x)^2-1} + \frac{3}{2} \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + C.$$

5.10 Integral binomnog diferencijala

Integrali oblika $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ mogu se rešiti (tj. mogu se svesti na integral racionalne funkcije) samo u sledeća tri slučaja:

1. ako je p ceo broj;
2. ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = a+bx^n$, gde je s imenilac razlomka p ;
3. ako je p racionalan i $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = ax^{-n} + b$, gde je s imenilac razlomka p .

Primer 5.32. Izračunaćemo integral $\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1+\sqrt{x})^2}$.

U ovom slučaju je $p = -2$, tj. p je ceo broj, pa se integral rešava smenom $t^2 = x$, $2t dt = dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1+\sqrt{x})^2} &= 2 \int \frac{t^2 dt}{(1+t)^2} = 2 \left(t+1 - 2\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} \right) + C \\ &= 2 \left(\sqrt{x}+1 - 2\ln|\sqrt{x}+1| - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Primer 5.33. Izračunaćemo integral $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$.

U ovom slučaju je $m = 1$, $n = 2/3$ i $p = -1/2$, tj. p je razlomak, ali je broj $\frac{m+1}{n} = \frac{1+1}{2/3} = 3$ ceo. Ako uvedemo smenu $t^2 = 1 + \sqrt[3]{x^2}$, tj. $x = \sqrt{(t^2-1)^3}$, ili $x^{1/3} = \sqrt{t^2-1}$, tada dobijamo $2t dt = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} dx$, $dx = 3\sqrt{t^2-1} t dt$, te je

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} &= 3 \int \frac{(t^2-1)^2 t dt}{t} = 3 \int (t^2-1)^2 dt \\ &= \frac{3}{5} \left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} \right)^5 - 2 \left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} \right)^3 + 3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C. \end{aligned}$$

Primer 5.34. Izračunaćemo integral $\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2-1}}$. U ovom slučaju je $m = -6$, $n = 2$, $p = -1/2$, pa je $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5}{2} + \frac{-1}{2}$ ceo broj.

Prema tome, može se uvesti smena $t^2 = 1 - x^{-2}$, odakle je $t dt = \frac{dx}{x^3}$ i $x^{-2} = 1 - t^2$, te je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{x^2 - 1}} &= \int \frac{dx}{x^3 x^4 \sqrt{1 - x^{-2}}} = \int (t^2 - 1)^2 dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} + t + C \\ &= \frac{(\sqrt{1 - x^{-2}})^5}{5} - 2 \frac{(\sqrt{1 - x^{-2}})^3}{3} + \sqrt{1 - x^{-2}} + C. \end{aligned}$$

Napomena. Za specijalne slučajeve integrala binomnog diferencijala možemo koristiti neke od dole navedenih smena. Pretpostavljamo da su parametri a i b pozitivni.

Za $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, smena $x = \frac{a}{b} \sin t$ dovodi do $a \sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t$.

Za $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$, smena $x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$ dovodi do $a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{a}{\cos t}$.

Za $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$ smena $x = \frac{a}{b \cos t}$ dovodi do $a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = a \cdot \operatorname{tg} t$.

Primer 5.35. Izračunavamo integral $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}$.

Posle smene $x = 3 \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{3 dt}{\cos^2 t}$ te odatle $\sqrt{9 + x^2} = 3 \frac{1}{\cos t}$, dobijamo

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} = \int \frac{3 \frac{dt}{\cos^2 t}}{27 \operatorname{tg}^2 t \frac{1}{\cos t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t}.$$

Dalje se koristi smena $u = \sin t$, $du = \cos t dt$, te je

$$\frac{1}{9} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{9} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{9 \sin t} + C = -\frac{1}{\frac{3}{\cos t} \cdot 3 \operatorname{tg} t} + C = -\frac{1}{3x \sqrt{x^2 + 9}} + C.$$

Primer 5.36. Izračunavamo integral $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx$.

Posle smene $x = \frac{2}{\cos t}$, $dx = \frac{2 \sin t dt}{\cos^2 t}$, koristeći relaciju $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \operatorname{tg} t$, dobijamo

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2} dx = \int \frac{4 \operatorname{tg} t \cos^2 t \sin t}{4 \cos^2 t} dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos^2 t} dt.$$

Dalje se uvodi smena $u = \sin t$, $du = \cos t dt$, i dobija se

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos^2 t} dt &= \int \frac{u^2}{1-u^2} du = -u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C \\ &= -\sin t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}}{1 - \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} \right| + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{x - \sqrt{x^2-4}} \right| + C.\end{aligned}$$

Glava 6

Određeni integral

Jedan od prvih problema koje je praksa nametnula matematici bio je određivanje površine ravne figure. Davno je bilo poznato da je površina pravougaonika jednaka proizvodu njegove dužine i širine; na osnovu toga, mogle su se odrediti površine nekih mnogouglova, npr. trougla i trapeza. Pretpostavimo sada da treba odrediti belu površinu na slici 6.1. Postavljanjem mreže koja se sastoji od dve familije međusobno paralelnih horizontalnih odnosno vertikalnih linija, sa slike 6.1 vidi se da se ta površina (a, očevidno, i površina proizvoljne ravne figure) može dobiti kao konačan zbir površina upisanih pravougaonika i konačan zbir površina tzv. *krivolinijskih trapeza*. Jedan *krivolinijski trapez* je predstavljen na slici 6.2. U stvari, još su starogrčki matematičari znali da je zapravo dovoljno izračunati njegovu površinu. Iako oni nisu dali opšti metod za određivanje njegove površine, oni su ovaj problem rešili približno, koristeći površine upisanih i opisanih pravougaonika. Ta je metoda u suštini i dovela do definicije određenog integrala, čija je vrednost (uz uslove koje ćemo kasnije precizirati) upravo površina krivolinijskog trapeza. Krajem XVII veka I. Njutn¹ i V. Lajbnic² su dokazali osnovnu formulu integralnog računa (koja se obično i zove po njima), čime su problem površine ravne figure sveli na izračunavanje neodređenog integrala funkcije f .

Slika 6.1.

Slika 6.2.

¹I. Newton (1642–1727)

²G. W. Leibniz (1646–1716)

6.1 Definicija određenog integrala

Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ data funkcija. *Podela* \mathcal{P} intervala $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je skup tačaka

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{ako važi} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (6.1)$$

Označimo dužinu i -tog intervala sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Neka su t_i proizvoljne tačke iz odgovarajućeg podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, tj.

$$a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq t_n \leq x_n = b.$$

Označimo $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$. Ako u podeli \mathcal{P} dodamo nove tačke podele dobijamo podelu \mathcal{P}_1 , za koju kažemo da je finija od \mathcal{P} .

Definicija 6.1. Neka je funkcija f definisana na $[a, b]$, neka je \mathcal{P} neka podela intervala $[a, b]$ i $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$, gde su t_i tačke iz podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tada se zbir

$$R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i = f(t_1) \Delta x_1 + \dots + f(t_n) \Delta x_n,$$

naziva (Rimanova³) integralna suma funkcije f za podelu \mathcal{P} .

Slika 6.3 ilustruje jedan sabirak $\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$ u Rimanovoj integralnoj sumi.

Primetimo da za $f \geq 0$ integralna suma $R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T})$ predstavlja zbir površina pravougaonika koji aproksimiraju površinu figure ispod grafika funkcije f (slika 6.2).

Parametar podele \mathcal{P} je jednak dužini Δx_k najvećeg podintervala $[x_{i-1}, x_i]$, odnosno

$$|\mathcal{P}| = \max_{1 \leq j \leq n} \Delta x_j. \quad (6.2)$$

Primetimo da ako budemo povećavali broj tačaka podele tako da ih "ravnomerno" raspoređujemo, da će tada integralna suma bolje aproksimirati površinu krivolinijskog trapeza ispod grafika funkcije. U graničnom slučaju kada broj deobnih tačaka neograničeno raste, tj. $n \rightarrow \infty$, tada uslov $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$ povlači da i dužine svih podintervala u podeli teže nuli, tj. tačke podele se "ravnomerno" raspoređuju i ne može se desiti da sve tačke podele budu koncentrisane samo u jednom delu intervala $[a, b]$.

Sada možemo dati sledeću definiciju.

³B. Riemann (1826–1866)

Definicija 6.2. Neka je data funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ako za svaku podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$ i svaki izbor od n tačaka t_1, t_2, \dots, t_n , sa osobinom $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, postoji uvek ista granična vrednost

$$I = \lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i,$$

tada se za funkciju f kaže da je Riman-integrabilna (kraće: integrabilna) na intervalu $[a, b]$, a broj I se zove (Rimanov) određeni integral funkcije f na $[a, b]$, i označavamo ga sa

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (6.3)$$

Brojevi a i b , $a < b$, su donja i gornja granica, a funkcija f je podintegralna funkcija određenog integrala (6.3).

Postojanje granične vrednosti $I = \lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$, znači da za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, sa osobinom da za proizvoljnu podelu \mathcal{P} sa osobinom $|\mathcal{P}| < \delta$ i bilo koji izbor od n tačaka $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ važi

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i \right| < \epsilon.$$

Na osnovu prethodne definicije lako dobijamo sledeće osobine određenog integrala.

Ako je f (Riman) integrabilna funkcija na intervalu $[a, b]$ i

1. ako je $a \neq b$, tada je $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$;
2. ako je $a = b$, tada važi $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Postoje i funkcije koje nisu integrabilne. Tako, na primer, ako je funkcija f definisana na $[a, b]$ i važi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, tada u prvom podintervalu $[x_0, x_1]$ bilo koje podele \mathcal{P} , za svako $M > 0$ postoji t_1 , takvo da važi

$$f(t_1) \Delta x_1 > M,$$

pa ne postoji $\lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$. To znači da funkcija f nije integrabilna. U stvari, važi sledeća teorema.

Teorema 6.1. Riman integrabilna funkcija je uvek ograničena.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neograničena funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ za koju postoji $I = \int_a^b f(x) dx$. Tada po definiciji određenog integrala postoji $\epsilon > 0$ takvo da je

$$|R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - I| < \epsilon \text{ za sve } \mathcal{P} \text{ i } \mathcal{T} \text{ takve da je } \Delta(\mathcal{P}) < \delta. \quad (6.4)$$

Pošto je f neograničeno na $[a, b]$ postoji podinterval $[x_{i-1}, x_i]$ na kojem je f neograničeno. Zbog toga postoji tačka $t'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tako da je

$$|f(t'_i) - f(t_i)| > 2\epsilon.$$

Uzimajući novi izbor tačaka \mathcal{T}' tako da zadržimo sve tačke iz \mathcal{T} sem t_i umesto koje uzmemo t'_i , dobijamo

$$|R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}')| > 2\epsilon.$$

Oдавde sledi po (6.4)

$$\begin{aligned} 2\epsilon &< |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T})| = |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) \pm I| \\ &\leq |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - I| + |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - I| < |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - I| + \epsilon. \end{aligned}$$

Oдавde dobijamo

$$\epsilon < |R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - I|,$$

što je u kontradikciji sa (6.4). \square

To znači da ćemo nadalje posmatrati samo *ograničene funkcije* f na intervalu $[a, b]$. Zato je $m = \inf_{t \in [a, b]} f(t) \leq f(x) \leq \sup_{t \in [a, b]} f(t) = M$ za svako $x \in [a, b]$.

Daćemo sada *drugu karakterizaciju određenog integrala*. U tu svrhu uvodimo oznake

$$m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t), \quad M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t).$$

Primitimo da uvedeni brojevi m_i i M_i postoje zbog ograničenosti funkcije, koja garantuje postojanje supremuma i infimuma. Uvodimo sada *donju i gornju (Darbuovu⁴) sumu* na sledeći način, slike 6.4 i 6.5,

$$D(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \text{i} \quad G(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i,$$

respektivno.

⁴G. Darboux (1842-1917)

Slika 6.4. Donja Darbuova suma.

Slika 6.6. $m(b-a) \leq R \leq M(b-a)$

Slika 6.5. Gornja Darbuova suma.

Slika 6.7. $D \leq R \leq G$ **Teorema 6.2.** *Neka je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tada važi***a)** (Nejednakost integralnih suma.) *Za svaku podelu \mathcal{P} i svaki izbor \mathcal{T} uvek važi*

$$m(b-a) \leq D(f, \mathcal{P}) \leq R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) \leq G(f, \mathcal{P}) \leq M(b-a) \quad (6.5)$$

b) (Princip finije podele.) *Profinjenjem \mathcal{P}_1 podele \mathcal{P} (dodavanjem novih tačaka podele na \mathcal{P}) donja Darbuova suma raste a gornja Darbuova suma opada, tj.*

$$D(f, \mathcal{P}) \leq D(f, \mathcal{P}_1) \leq G(f, \mathcal{P}_1) \leq G(f, \mathcal{P}). \quad (6.6)$$

c) *Uzimajući za dve podele \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 zajedničku podelu $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ imamo*

$$D(f, \mathcal{P}_1) \leq D(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}_2). \quad (6.7)$$

Slika 6.8. Profinjenje povećava sabirak u D (prve dve sl.),
a smanjuje sabirak u G (zadnje dve sl.).**Dokaz.****a)** Kako je $m \leq m_i \leq f(t_i) \leq M_i \leq M$ to je $m \leq m_i \leq f(t_i) \leq M_i \leq M$ za $i = 1, \dots, n$. Sumirajući odgovarajuće strane prethodnih n nejednakosti dobijamo tražene nejednakosti (6.5). Videti sl. 6.6 i sl. 6.7.**b)** Dovoljno je uočiti profinjenje \mathcal{P}_1 za samo jednu tačku z u odnosu na podelu \mathcal{P} . Pretpostavimo da $z \in [x_{i-1}, x_i]$. Tada se u novoj podeli u donjoj Darbuovoj sumi umesto sabirka $m_i \leq x_i$ pojavljuju dva sabirka (videti prve dve slike na sl. 6.8) čija suma je veća od prvobitnog sabirka $m_i \leq x_i$, a u gornjoj Darbuovoj sumi umesto sabirka $M_i \leq x_i$ pojavljuju dva sabirka (videti dve zadnje slike na sl. 6.8) čija suma je manja od prvobitnog sabirka $M_i \leq x_i$. Odavde sledi tražena nejednakost (6.6).**c)** Sledi na osnovu b) pošto je podela $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ finija i od \mathcal{P}_1 i od \mathcal{P}_2 . \square **Definicija 6.3.** Donji (Rimanov) integral \underline{I} i gornji (Rimanov) integral \bar{I} funkcije f na $[a, b]$ su dati sa

$$\underline{I} = \sup_{\mathcal{P}} D(f, \mathcal{P}) \quad i \quad \bar{I} = \inf_{\mathcal{P}} G(f, \mathcal{P}),$$

gde supremum i infimum ide preko svih podela \mathcal{P} .Funkcija f je (Darbu) integrabilna ako je

$$\underline{I} = \bar{I} = I \text{ (Darbuov određeni integral).}$$

Primetimo da \underline{I} i \bar{I} uvek postoje za proizvoljnu ograničenu funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na osnovu ograničenosti skupova $\{D(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ i $\{G(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ po (6.5). Njihov odnos je određen sledećom teoremom.

Teorema 6.3. *Za ograničenu funkciju $f \rightarrow \mathbb{R}$ uvek važi*

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f).$$

Dokaz. Pokažimo da je svaki element skupa $\{D(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ manji od bilo kog elementa skupa $\{G(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$. Odaberimo jedan element $D(f, \mathcal{P}_1)$ iz skupa $\{D(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ i jedan element $G(f, \mathcal{P}_2)$ iz skupa $\{G(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$. Uzmimo podelu $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Tada na osnovu teoreme 6.2 c) važi

$$D(f, \mathcal{P}_1) \leq D(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}_2),$$

što smo i trebali dokazati. Pošto je svaki element skupa $\{D(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ manji od bilo kog elementa skupa $\{G(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P}\}$ to je

$$\underline{I} = \sup_{\mathcal{P}} D(f, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} G(f, \mathcal{P}) = \bar{I}. \quad \square$$

Primetimo da je donja Darbuova suma uvek manja ili jednaka od odgovarajućeg integrala, a koji je manji ili jednak od bilo koje odgovarajuće gornje Darbuove sume, tj. $D(f, \mathcal{P}_1) \leq I \leq G(f, \mathcal{P}_2)$.

Darbu integrabilnost se može potpuno okarakterisati na sledeći način.

Teorema 6.4. (Kriterijum integrabilnosti.) *Ograničena funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je Darbu integrabilna onda i samo onda ako za svako $\epsilon > 0$ postoji podela \mathcal{P} tako da je*

$$G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon.$$

Dokaz. *Uslov je potreban.* Naime, neka je f (Darbu) integrabilna funkcija, tj. $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. Za dato $\epsilon > 0$ na osnovu definicije \underline{I} (supremum) postoji podela \mathcal{P}_1 takva da je

$$D(f, \mathcal{P}_1) > \underline{I} - \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.8)$$

Na osnovu definicije \bar{I} (infimum) postoji podela \mathcal{P}_2 takva da je

$$G(f, \mathcal{P}_2) < \bar{I} + \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.9)$$

Tvrdimo da je tražena podela \mathcal{P} data sa $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Pokažimo to. Na osnovu teoreme 6.2 c) važi

$$D(f, \mathcal{P}_1) \leq D(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}_2).$$

Odavde sledi prvi red sledećih nejednakosti, dok drugi red sledi po (6.8) i (6.9),

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) &\leq G(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}_1) \\ &\leq \bar{I} + \frac{\epsilon}{2} - \left(\underline{I} - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon. \end{aligned}$$

Uslov je dovoljan. Pretpostavimo da za proizvoljno $\epsilon > 0$ uvek postoji podela \mathcal{P} za koju je $G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon$. Pošto je uvek $\bar{I} \leq G(f, \mathcal{P})$ (\bar{I} je infimum) i $\underline{I} \geq D(f, \mathcal{P})$ (\underline{I} je supremum) to važi

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon,$$

gde nenegativnost leve strane sledi na osnovu teoreme 6.3. Pošto je $\epsilon > 0$ bilo proizvoljno iz zadnje nejednakosti sledi $\bar{I} = \underline{I}$. \square

Dokazani kriterijum integrabilnosti nam omogućava da pokažemo ekvivalentnost pristupa određenom integralu preko Rimanovih integralnih suma (kada imamo izbor za \mathcal{T}) i pristupa preko Darbuovih suma (oslobođenog od \mathcal{T}).

Teorema 6.5. *Riman integrabilnost (u smislu definicije 6.2) funkcije f je ekvivalentna sa njenom Darbu integrabilnosti (u smislu definicije 6.3) te su Rimanov i Darbuov integral funkcije f jednaki.*

Dokaz. Neka je f ograničena ($|f(x)| < M$ ($x \in [a, b]$) i Darbu integrabilna funkcija. Tada je $\underline{I}(f) = \bar{I}(f) = I$. Pokazaćemo da je funkcija f i Riman integrabilna.

Za proizvoljno $\epsilon > 0$ na osnovu teoreme 6.4 postoji podela \mathcal{P}_1 intervala $[a, b]$ na n_1 podintervala tako da je

$$G(f, \mathcal{P}_1) - D(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.10)$$

Odaberimo $\delta = \frac{\epsilon}{8n_1M}$. Uzmimo bilo koju podelu \mathcal{P}_2 intervala $[a, b]$ na n_2 podintervala, za koju je $\omega(\mathcal{P}_2) < \delta$. Tada je za podelu $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ intervala $[a, b]$ na n podintervala na osnovu teoreme 6.2 b) (6.6)

$$D(f, \mathcal{P}_1) \leq D(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}_1).$$

Odavde i na osnovu (6.10) dobijamo

$$G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) \leq G(f, \mathcal{P}_1) - D(f, \mathcal{P}_1) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (6.11)$$

Primetimo da se sume $G(f, \mathcal{P}_2)$ i $G(f, \mathcal{P})$ (profinjenje podele \mathcal{P}_2) razlikuju samo u sabircima u kojima su dodate tačka iz podele \mathcal{P}_1 . Primetimo da je svaki sabirak $\bar{M}_i x_i$ u integralnoj sumi za podelu \mathcal{P}_2 i isto tako svaki sabirak $M_i x_i$ u integralnoj sumi za podelu \mathcal{P} uvek manji od M .

Kako u $G(f, \mathcal{P}_2)$ i $G(f, \mathcal{P})$ različitih sabiraka (zbog dodatih tačaka iz podele \mathcal{P}_1 , koje ulaze u podintervale iz podele \mathcal{P}_2) može biti najviše $n_1 - 2$ (u podele \mathcal{P}_2) to je $G(f, \mathcal{P}_2) - G(f, \mathcal{P}) < 2(n_1 - 2)M$ (nova tačka u podintervalu prvobitne podele \mathcal{P}_2 daje dva podintervala te otuda 2 nova sabirka i zato je faktor 2 u zadnjoj nejednakosti). Kako smo $\epsilon > 0$ birali tako da je $\epsilon = \frac{1}{8n_1M}$ dobijamo

$$G(f, \mathcal{P}_2) - G(f, \mathcal{P}) < \epsilon/4.$$

Sasvim analogno dobijamo i

$$D(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon/4.$$

Na osnovu zadnje dve dobijene nejednakosti i (6.11) sledi

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}_2) &= G(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}_2) \pm G(f, \mathcal{P}) \pm D(f, \mathcal{P}) \\ &= (G(f, \mathcal{P}_2) - G(f, \mathcal{P})) + (G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P})) \\ &\quad + (D(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}_2)) \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

Odavde dobijamo uz činjenicu da za Rimanovu integralnu sumu uvek važi $D(f, \mathcal{P}_2) \leq R(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{T}) \leq G(f, \mathcal{P}_2)$ i da je $D(f, \mathcal{P}_2) \leq I \leq G(f, \mathcal{P}_2)$

$$|R(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{T}) - I| \leq |G(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}_2)| < \epsilon.$$

To znači da za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|R(f, \mathcal{P}_2, \mathcal{T}) - I| < \epsilon$ za svaku podelu \mathcal{P}_2 za koju je $\|\mathcal{P}_2\| < \delta$, tj. f je Riman integrabilna po definiciji 6.2 sa Rimanovim integralom jednakim Darbuovom integralu I .

Pretpostavimo sada da je funkcija f Riman integrabilna sa Rimanovim integralom I i dokažimo da je ona i Darbu integrabilna po definiciji 6.3 sa istim Darbuovim integralom I . Na osnovu teoreme 6.1 f je ograničena funkcija. Na osnovu definicije 6.2 za svako $\epsilon > 0$ uvek postoji $\delta > 0$ tako da za sve podele \mathcal{P} sa $\|\mathcal{P}\| < \delta$ i svaki izbor \mathcal{T} važi

$$|R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - I| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Za jednu takvu fiksnu podelu \mathcal{P} odredimo dva izbora tačaka \mathcal{T} i \mathcal{T}' da je $|R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - D(f, \mathcal{P})| < \frac{\epsilon}{4}$ (na osnovu osobine infimuma, $f(t_i)$ biramo blisko m_i) i $|G(f, \mathcal{P}) - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}')| < \frac{\epsilon}{4}$ (na osnovu osobine supremuma, $f(t'_i)$ biramo blisko M_i). Odavde sledi

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) &= G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) \pm I \pm R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) \pm R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') \\ &= (G(f, \mathcal{P}) - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}')) + (R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}') - I) \\ &\quad + (I - R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T})) + (R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - D(f, \mathcal{P})) < \epsilon. \end{aligned}$$

Pošto se brojevi \underline{I}, \bar{I} i I svi nalaze između $D(f, \mathcal{P})$ i $G(f, \mathcal{P})$, a razmak između $D(f, \mathcal{P})$ i $G(f, \mathcal{P})$ je manji od ϵ , to je i razmak između svaka dva broja iz skupa $\{\underline{I}, \bar{I}, I\}$ manji od $\epsilon > 0$. Kako je $\epsilon > 0$ bilo proizvoljno to sledi

$$\underline{I} = \bar{I} = I,$$

što dokazuje Darbu integrabilnost funkcije f po definiciji 6.3 sa odgovarajućim Darbuovim integralom I . \square

Zato ćemo na osnovu prethodne teoreme nadalje govoriti samo o integrabilnosti funkcije i određenom integralu, izostavljajući Rimanov, odnosno Darbuov (nekada se koristi i naziv Rimanova integrabilnost) a za oznaku određenog integrala ćemo koristiti

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

6.2 Osobine određenog integrala

Navešćemo prvo dva primera integrabilnih funkcija i izračunaćemo njihove određene integrale.

Primer 6.1 Pokazaćemo da ako je funkcija f konstanta, tj. $f(x) = k, x \in [a, b]$, da je tada

$$\int_a^b f(x) dx = k(b-a).$$

Za proizvoljnu podelu \mathcal{P} i proizvoljan izbor \mathcal{T} imamo da iz

$$R(f, \mathcal{P}, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n f(t_i) x_i = \sum_{i=1}^n k x_i = k \sum_{i=1}^n x_i = k(b-a),$$

sledi

$$\lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i) x_i = \lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k x_i = k(b-a).$$

Primer 6.2 Pokazaćemo da ako je funkcija $f(x) = x^2$ za $x \in [0, a]$, da je tada

$$I = \int_0^a f(x) dx = \frac{a^3}{3}.$$

Kako je funkcija $f(x) = x^2$ neprekidna na intervalu $[0, a]$ ona je integrabilna te postoji integral $\int_0^a f(x) dx$. Da bismo izračunali ovaj integral, izvršimo podelu \mathcal{P}

intervala $[0, a]$ na n jednakih podintervala. Tada je $x_i = a/n$. Potražimo donju Darbuovu sumu, koristeći da je $m_i = f(x_{i-1}) = (i-1)^2(a/n)^2$. Dobijamo

$$\begin{aligned} D(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (x_{i-1})^2 x_i \\ &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^2 (i-1)^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \end{aligned}$$

gde smo koristili da je

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6.12)$$

Odavde sledi da je

$$d = \sup\{D(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ na jednake podintervale}\} = \frac{a^3}{3}.$$

Potražimo analogno gornju Darbuovu sumu, koristeći da je $M_i = f(x_i) = i^2(a/n)^2$. Dobijamo

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (x_i)^2 x_i \\ &= \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^2 i^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

gde smo koristili (6.12). Odavde sledi da je

$$g = \inf\{G(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ na jednake podintervale}\} = \frac{a^3}{3}.$$

Kako je

$$a^3/3 = d \leq \sup\{D(f, \mathcal{P}) \mid \text{po svim podelama } \mathcal{P}\} = I$$

i

$$a^3/3 = g \geq \inf\{G(f, \mathcal{P}) \mid \text{po svim podelama } \mathcal{P}\} = I,$$

to je $a^3/3 \leq I \leq a^3/3$, te sledi $I = a^3/3$.

Videli smo u zadnjem primeru da iako podintegralna funkcija nije bila složena, izračunavanje njenog određenog integrala nije bilo tako jednostavno. Videćemo kasnije da se izračunavanje određenog integrala može znatno uprostiti, korišćenjem neodređenog integrala.

Nadalje ćemo dokazati neke osnovne osobine određenog integrala.

Teorema 6.6. *Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, i k neki realan broj, tada je i funkcija kf integrabilna na $[a, b]$ i važi*

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

Dokaz. Ako je $k = 0$, tada je prema Teoremi 6.1 $\int_a^b kf(x) dx = 0$. Neka je $k \neq 0$.

Postoji $\int_a^b f(x) dx = I$, jer je funkcija f integrabilna. Ako je \mathcal{P} proizvoljna podela zatvorenog intervala $[a, b]$, tada za svako $\epsilon = \frac{\epsilon}{k} > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za $(\mathcal{P}) < \delta$ i bilo koji izbor tačaka $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ važi

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - I \right| < \epsilon = \frac{\epsilon}{k},$$

za $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Prema tome je $\left| \sum_{i=1}^n kf(t_i) \Delta x_i - kI \right| < k \epsilon = \epsilon$. □

Teorema 6.7. *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$, tada važi*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (6.13)$$

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ dato. Pošto su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$, to postoje realni brojevi I_1 i I_2 takvi da važi

$$\int_a^b f(x) dx = I_1, \quad \int_a^b g(x) dx = I_2$$

u smislu definicije 6.2. To znači da za $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ postoje brojevi $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ sa osobinom da je za proizvoljnu podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$ za koju je $(\mathcal{P}) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ važi

$$\left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - I_1 \right| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i - I_2 \right| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{2},$$

za bilo koji izbor tačaka $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Integralna suma $R(f+g, \mathcal{P}, \mathcal{T})$ za funkciju $f+g$ se može pisati kao

$$R(f+g, \mathcal{P}, \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^n (f(t_i) + g(t_i)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i,$$

gde su t_i proizvoljne tačke iz $[x_{i-1}, x_i]$ određenog podelom \mathcal{P} .

Prema tome je za $(\mathcal{P}) < \min\{\Delta x_1, \Delta x_2\}$

$$\begin{aligned} |R(f+g, \mathcal{P}, \mathcal{T}) - (I_1 + I_2)| &= \left| \left(\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - I_1 \right) + \left(\sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i - I_2 \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i - I_1 \right| + \left| \sum_{i=1}^n g(t_i) \Delta x_i - I_2 \right| \\ &< \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x}{2} = \Delta x. \quad \square \end{aligned}$$

Geometrijski je očigledno da za nenegativnu i neprekidnu funkciju f na $[a, b]$, tj. takvu da je $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b.$$

To znači da je površina krivolinijskog trapeza koji je određen funkcijom f nad intervalom $[a, b]$ jednaka zbiru površina krivolinijskih trapeza funkcije f nad $[a, c]$, i $[c, b]$. Uopšte važi

Slika 6.9. Aditivnost određenog integrala.

Teorema 6.8. *Ako je funkcija f integrabilna na $[a, c]$ i $[c, b]$ gde je $a < c < b$, tada je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ i važi*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dokaz. Pokazaćemo prvo egzistenciju integrala $\int_a^b f(x) dx$. Neka je dato proizvoljno $\epsilon > 0$. Pošto je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, c]$ to na osnovu teoreme 6.4 postoji podela $\mathcal{P}_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_r = c\}$ intervala $[a, c]$ tako da je

$$\frac{\epsilon}{2} > G(f, \mathcal{P}_1) - D(f, \mathcal{P}_1) = \sum_{i=1}^r (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

Pošto je funkcija f integrabilna na intervalu $[c, b]$ to na osnovu teoreme 6.4 postoji podela $\mathcal{P}_2 = \{c = x_r, x_{r+1}, \dots, x_n = b\}$ tako da je

$$\frac{\epsilon}{2} > G(f, \mathcal{P}_2) - D(f, \mathcal{P}_2) = \sum_{i=r+1}^n (M_i - m_i) x_i.$$

Uzimamo podelu $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ intervala $[a, b]$. Na osnovu prethodne dve nejednakosti dobijamo

$$G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^r (M_i - m_i) x_i + \sum_{i=r+1}^n (M_i - m_i) x_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad (6.14)$$

što znači na osnovu teoreme 6.4 da je funkcija f integrabilna na intervalu $[a, b]$.

Dokazaćemo sada samu jednakost. Kako je donja Darbuova suma uvek manja ili jednaka od odgovarajućeg integrala a koji je manji ili jednak od bilo koje odgovarajuće gornje Darbuove sume to dobijamo sledeće tri nejednakosti. Za podelu \mathcal{P}_1 važi

$$\sum_{i=1}^r m_i x_i \leq \int_a^c f(x) dx \leq \sum_{i=1}^r M_i x_i. \quad (6.15)$$

Za podelu \mathcal{P}_2 važi

$$\sum_{i=r+1}^n m_i x_i \leq \int_c^b f(x) dx \leq \sum_{i=r+1}^n M_i x_i. \quad (6.16)$$

Za podelu \mathcal{P} važi

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n M_i x_i. \quad (6.17)$$

Sada na osnovu (6.14) i desne strane nejednakosti (6.17) dobijamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq \sum_{i=1}^n M_i x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^r m_i x_i + \sum_{i=r+1}^n m_i x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^r m_i x_i + \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \end{aligned}$$

gde smo koristili leve strane nejednakosti (6.15) i (6.16). Sa druge strane, na osnovu (6.14) i leve strane nejednakosti (6.17) dobijamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\geq \sum_{i=1}^n m_i x_i \\ &\geq \sum_{i=1}^n M_i x_i - \\ &= \sum_{i=1}^r M_i x_i + \sum_{i=r+1}^n M_i x_i - \\ &\geq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx - , \end{aligned}$$

gde smo koristili desne strane nejednakosti (6.15) i (6.16). Pošto je $\epsilon > 0$ bilo proizvoljno na osnovu zadnje dve nejednakosti sledi tražena jednakost. \square

Teorema 6.9. *Neka je funkcija f integrabilna na $[a, b]$.*

(i) *Ako je funkcija f integrabilna i nenegativna na $[a, b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(ii) *Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$, i $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, tada je*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) *Tada je funkcija $|f|$ je takođe integrabilna na $[a, b]$ i važi*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Dokaz. (i) Sledi na osnovu nenegativnosti gornjih i donjih Darbuovih suma, koja se očuvava prelaskom na infimum i supremum.

(ii) Sledi na osnovu (i) i teorema 6.7 i 6.6.

(iii) Nejednakost sledi na osnovu (ii) i nejednakosti $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Da iz integrabilnosti funkcije f sledi integrabilnost funkcije $|f|$ dobijamo na osnovu teoreme 6.4 koristeći nejednakost $||u| - |v|| \leq |u - v|$. \square

Rezimirajmo osnovne osobine određenog integrala:

(i) Ako je $a \neq b$, tada je $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

(ii) Ako je $a = b$, tada važi $\int_a^a f(x) dx = 0$.

(iii) Ako je funkcija f integrabilna na intervalima $[a, c]$ i $[c, b]$ gde je $a < c < b$, tada je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(iv) Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, i k neki realan broj, tada je i funkcija kf integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

(v) Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$, tada je funkcija $f + g$ integrabilna i važi

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

(vi) Ako je funkcija f integrabilna i nenegativna na $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

(vii) Ako su funkcije f i g integrabilne na $[a, b]$, i $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(viii) Ako je f integrabilna funkcija na $[a, b]$, tada je funkcija $|f|$ takođe integrabilna na $[a, b]$ i važi

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

6.3 Klase integrabilnih funkcija

Postavlja se pitanje: koje funkcije su (Riman) integrabilne? Videli smo dva primera integrabilnih funkcija: funkcija konstanta i $f(x) = x^2$. Da li funkcija koja ima izvod ima i integral, tj. da li su diferencijabilne funkcije ujedno i integrabilne? Pozitivan odgovor daje sledeća teorema i to za još širu klasu funkcija.

Teorema 6.10. *Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna, onda je i integrabilna.*

Dokaz. Svaka neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ je ograničena. Dalje svaka neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$ je i uniformno neprekidna. Zato za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da važi

$$\left(|x' - x| < \delta \right) \Rightarrow \left(|f(x') - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a} \right). \quad (6.18)$$

Biramo podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$ na n jednakih podintervala tako da je dužina podintervala $\frac{b-a}{n} < \delta$. Kako neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu dostiže svoj maksimum i svoj minimum to je

$$M_i = \max_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) = f(t_i^M) \quad \text{i} \quad m_i = \min_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) = f(t_i^m),$$

gde $t_i^M, t_i^m \in [x_{i-1}, x_i]$.

Slika 6.10.

Primetimo da je (videti sl. 6.10.)

$$|t_i^M - t_i^m| \leq |x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Zato je na osnovu (6.18)

$$|f(t_i^M) - f(t_i^m)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Odavde sledi

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \cdot x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(t_i^M) - f(t_i^m)) \cdot x_i \\ &\leq \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon, \end{aligned}$$

tj. za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji podela \mathcal{P} tako da je $G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon$, što po teoremi 6.4 daje integrabilnost neprekidne funkcije. \square

Druga široka klasa integrabilnih funkcija su monotone funkcije. Naime važi

Teorema 6.11. *Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona, onda je i integrabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f rastuća. Za ostale slučajeve monotonosti dokaz je analogan. Neka je dato proizvoljno ali fiksno $\epsilon > 0$. Biramo podelu \mathcal{P} intervala $[a, b]$ na n jednakih podintervala tako da je

$$(f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} < \epsilon.$$

Pošto je f rastuća to imamo da je

$$M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) = f(x_i) \quad \text{i} \quad m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t) = f(x_{i-1}).$$

Sledi

$$\begin{aligned} G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n M_i x_i - \sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) x_i \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \epsilon, \end{aligned}$$

tj. za proizvoljno $\epsilon > 0$ postoji podela \mathcal{P} tako da je $G(f, \mathcal{P}) - D(f, \mathcal{P}) < \epsilon$, što po teoremi 6.4 daje integrabilnost rastuće funkcije. \square

Napomena. Prethodna teorema važi i kada je f po delovima monotona, tj. postoji podela intervala $[a, b]$ na konačan broj podintervala tako da na svakom od tih podintervala funkcija ima isti tip monotonosti. Ovo sledi na osnovu teoreme 6.8.

Da bi dobili potpunu karakterizaciju klase integrabilnih funkcija uvodimo sledeći važan pojam.

Definicija 6.4. Skup $N \subset \mathbb{R}$ je skup mere nula ako za svako $\epsilon > 0$ postoji prebrojiv pokrivač skupa N sa otvorenim intervalima (a_i, b_i) , tj. $N \subset \cup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, tako da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \leq \epsilon.$$

Očigledno je da je jednotačan skup mere nula, jer tačku uvek možemo smestiti u interval dužine manje od ϵ . Primere skupova mere nula dobijamo na osnovu sledeće teoreme.

Teorema 6.12. *Sledeći skupovi su mere nula:*

- a) *Svaki podskup skupa mere nula.*
- b) *Prebrojiva unija skupova mere nula.*
- c) *Svaki prebrojiv skup.*

Dokaz. a) Ako je N skup mere nula tada se i svaki njegov podskup može pokriti sa njegovim prebrojivim ϵ -pokrivačem iz definicije 6.4.

b) Neka je N_1, N_2, \dots niz skupova mere nula. Neka je dato $\epsilon > 0$. Tada se skup N_1 može pokriti sa prebrojivo mnogo otvorenih intervala (a_i^1, b_i^1) tako da je $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^1 - a_i^1) \leq \epsilon/2$. Uopšte, za svako $k \in \mathbb{N}$ skup N_k se može pokriti sa prebrojivo mnogo otvorenih intervala (a_i^k, b_i^k) ($i \in \mathbb{N}$) tako da je $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^k - a_i^k) \leq \epsilon/2^k$. Familija svih intervala (a_i^k, b_i^k) po k i i pokriva skup N , tj.

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i^k, b_i^k).$$

Primetimo da je ova familija prebrojiva kao prebrojiva unija prebrojivih skupova i važi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^k - a_i^k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon/2^k = \epsilon,$$

gde smo koristili sumu geometrijske progresije za $1/2 < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Otuda sledi da je N skup mere nula.

c) Sledi na osnovu b) jer se prebrojiv skup može predstaviti kao prebrojiva unija jednočlanih skupova. \square

Na osnovu prethodne teoreme pod c) odmah dobijamo da su skupovi \mathbb{N}, \mathbb{Z} i \mathbb{Q} mere nula. Interval $[a, b]$ nije skup mere nula, pa zato ni sam skup \mathbb{R} nije mere nula.

Ako neka osobina važi za sve tačke sem za tačke čija je mera nula, onda kažemo da osobina važi *skoro svuda*.

Potpuna karakterizacija klase svih funkcija koje su (Riman) integrabilne je data sledećom važnom teoremom, koju ovde nećemo dokazivati.

Teorema 6.13. (Lebeg⁵) *Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je (Riman) integrabilna ako i samo ako je ograničena i jednaka skoro svuda nekoj neprekidnoj funkciji, tj. skup njenih tačaka prekida je mere nula.*

⁵H. Lebesgue (1875-1941)

6.4 Teoreme srednje vrednosti za određeni integral

Teorema 6.14. (Teorema srednje vrednosti za integral) *Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da važi*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Dokaz. Ako je funkcija f konstantna funkcija, dokaz je trivijalan i sledi iz teoreme 6.1. Ako, međutim, vrednost funkcije f nije konstantna na $[a, b]$ tada funkcija f zbog neprekidnosti dostiže na $[a, b]$ minimum m i maksimum M , tj., postoje tačke u i v takve da važi $f(u) = m$ i $f(v) = M$, što znači da je tada $m \leq f(x) \leq M$. Na osnovu teoreme 6.9 pod (ii) važi

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx,$$

odakle je

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a), \quad \text{odnosno} \quad f(u) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq f(v).$$

Kako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, ona dostiže sve vrednosti na tom intervalu između $f(u)$ i $f(v)$. To znači da postoji $c \in [u, v]$ takvo da je

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

Napomena. Broj c i u ovom slučaju nije jednoznačno određen, kao što nije bio ni kod Rolove ili Lagranžove teoreme. Slika 6.11.

Ako je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$, tada teorema 6.14 ima jednostavnu *geometrijsku interpretaciju*. Naime, u tom slučaju površina pravougaonika čija je jedna stranica jednaka $b - a$ (dužina intervala $[a, b]$), a druga stranica jednaka $f(c)$ jednaka je površini krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a, b]$, a koja je određena integralom funkcije f na $[a, b]$.

Teorema 6.14 je, u stvari, specijalan slučaj sledeće teoreme, koju ovde nećemo dokazati a čiji dokaz je analogan dokazu prethodne teoreme.

Teorema 6.15. (Uopštena teorema srednje vrednosti za integral.) *Neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, neka je funkcija g integrabilna i stalnog znaka na $[a, b]$. Tada postoji tačka $c \in [a, b]$, sa osobinom*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

6.5 Osnovna teorema integralnog računa

U ovom poglavlju ćemo uspostaviti vezu određenog integrala sa neodređenim integralom i time svesti izračunavanja određenog integrala na izračunavanje neodređenog integrala. Važna posledica teorema srednje vrednosti za integral jeste sledeća teorema.

Teorema 6.16. *Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, tada je funkcija $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa*

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b], \quad (6.19)$$

primitivna funkcija za funkciju f , tj. za svako $x \in (a, b)$ važi $G'(x) = f(x)$.

Dokaz. Neka su x i $x + \Delta x$ iz (a, b) . Po definiciji prvog izvoda je

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x + \Delta x} f(t) dt}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme srednje vrednosti za integrale 6.14, postoji tačka c iz intervala $[x, x + \Delta x]$ takva da važi

$$\int_x^{x + \Delta x} f(t) dt = \Delta x \cdot f(c).$$

Prelaskom na graničnu vrednost dobijamo

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x f(c)}{\Delta x} = f(x),$$

gde smo koristili neprekidnost funkcije f u tački x . □

Na osnovu prethodne teoreme sada možemo dati vezu između određenog i neodređenog integrala (osnovnu teoremu integralnog računa).

Teorema 6.17. (Njutn–Lajbnicova formula.) *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, a F jedna njena primitivna funkcija na $[a, b]$, tj.*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Tada važi:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (6.20)$$

Dokaz. Neka je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f i neka je G funkcija data relacijom (6.19), tj.,

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Pokazano je da se dve primitivne funkcije za istu funkciju mogu najviše razlikovati za konstantu, što znači

$$G(x) - F(x) = C, \quad \text{odakle sledi} \quad \int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

za svako $x \in [a, b]$. Na osnovu relacije (6.19) je

$$G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C, \quad \text{odakle sledi} \quad F(a) = -C.$$

Na osnovu prethodnog imamo

$$G(b) = \int_a^b f(t) dt = F(b) + C = F(b) - F(a). \quad \square$$

Uobičajeno je da se pri izračunavanju određenog integrala piše

$$\int_a^b f(t) dt = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (6.21)$$

Primer 6.3. Primenom osnovne teoreme integralnog računa odredićemo sledeće određene integrale:

$$\text{a) } \int_{-1}^4 (8x^3 + 3x^2 + 1) dx; \quad \text{b) } \int_{\sqrt{3}}^3 \left(2e^{3x} + \frac{3}{x^2 + 9} + 1 \right) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-1}^4 (8x^3 + 3x^2 + 1) dx &= \left(8 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^4 \\ &= 2 \cdot 4^4 + 4^3 + 4 - (2 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)) \\ &= 580. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_{\sqrt{3}}^3 \left(2e^{3x} + \frac{3}{x^2+9} + 1 \right) dx &= \left(\frac{2}{3}e^{3x} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + x \right) \Big|_{\sqrt{3}}^3 \\
 &= \frac{2}{3}e^{3 \cdot 3} + \operatorname{arctg}(3/3) + 3 - \frac{2}{3}e^{3 \cdot \sqrt{3}} - \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3) - \sqrt{3} \\
 &= \frac{2}{3}(e^9 - e^{3\sqrt{3}}) + \frac{1}{12} + 3 - \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Primer 6.4. Odredićemo broj $c \in [a, b]$ koji zadovoljava uslove teoreme 6.14, tj. teoreme prve srednje vrednosti integrala, za sledeći integral: $\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx$.

Po teoremi 6.17 je

$$\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^3 = \frac{39}{4}.$$

Na osnovu teoreme 6.14 postoji tačka c takva da važi

$$\int_0^3 \left(4 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(4 - \frac{c^2}{4} \right) (3 - 0), \quad \text{ili} \quad \frac{39}{4} = \frac{16 - c^2}{4} \cdot 3.$$

Oдавde je $c^2 = 3$, pa je tražena vrednost $c = \sqrt{3} \in [0, 3]$.

6.6 Smena promenljivih kod određenog integrala

Kod izračunavanja određenog integrala koristi se neodređeni integral, tako da se i smena kao i parcijalna integracija mogu primeniti na neodređeni integral, pa se na osnovu Njutn-Lajbnicove formule samo zamenjuju granice. Međutim možemo vršiti *smenu* i direktno u određenom integralu na sledeći način.

Ako je funkcija f bijekcija intervala $[c, d]$ na interval $[a, b]$ i ima neprekidan prvi izvod na (c, d) , tada posle smene $x = \varphi(t)$, što daje $dx = \varphi'(t) dt$, važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

gde je $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$. Naime, ako je F jedna primitivna funkcija za f tada po Njutn-Lajbnicovoj formuli važi $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Tada je izvod za složenu funkciju $F(\varphi(t))$ za $t \in [c, d]$ dat sa

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

tj. $F(t)$ je primitivna funkcija za $f(t) = f'(t)$, pa je

$$\int_c^d f'(t) dt = F(d) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Primer 6.5. Izračunaćemo sledeće integrale:

a) $\int_3^6 \sqrt{x-3} dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x-2} dx$;

a) Ako stavimo smenu $x = t = t + 3$, dakle $dx = dt$, tada nove granice integracije postaju $t = 3 - 3 = 0$ i $t = 6 - 3 = 3$. Tako dobijamo

$$\int_3^6 \sqrt{x-3} dx = \int_0^3 t^{1/2} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} \Big|_0^3 = \frac{2\sqrt{27}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

b) Ako koristimo smenu $t = x + 2$, dakle $dt = dx$, tada posle promene granica dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x+2} dx &= \int_1^3 \frac{(t-2)^2}{t} dt = \left(\frac{t^2}{2} - 4t + 4 \ln t \right) \Big|_1^3 \\ &= \frac{9}{2} - 12 + 4 \ln 3 - \frac{1}{2} + 4 = 4 \ln 3 - 4. \end{aligned}$$

Primer 6.6. Neka je $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija na intervalu $[-a, a]$. Pokazaćemo sledeće jednakosti:

a) Ako je f parna funkcija, tada je $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

b) Ako je f neparna funkcija, tada je $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

a) Ako je f parna funkcija, tada za sve $x \in [-a, a]$ važi $f(x) = f(-x)$, pa se primenom teoreme o aditivnosti integrala dobija

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Ako u prvom integralu uvedemo smenu $t = -x$, dakle $dt = -dx$, pri čemu je za $x = -a$, $t = a$, a za $x = 0$ je $t = 0$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

b) Ako je f neparna funkcija, tada za sve $x \in [-a, a]$ važi $f(-x) = -f(x)$, pa se dobija

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Ako u prvom integralu uvedemo smenu $t = -x$, tada je $dt = -dx$ i za $x = -a$, je $t = a$, a za $x = 0$ je $t = 0$, pa dobijamo

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

6.7 Parcijalna integracija

Ako su u i v neprekidno-diferencijabilne funkcije na $[a, b]$, tada važi *formula parcijalne integracije*:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x) dx &= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \\ &= u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Primer 6.7. Izračunaćemo sledeće određene integrale:

$$\text{a) } \int_2^7 x e^{-5x} dx; \quad \text{b) } \int_0^{1/2} x^2 \sin(3x) dx; \quad \text{c) } \int_1^2 x \ln x dx.$$

a) Ako stavimo $u = x$ i $dv = e^{-5x} dx$ tada je $du = dx$ i

$$v = \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x}.$$

U zadnjem integralu korišćena je smena $t = -5x$. Na osnovu formule (6.22) važi:

$$\begin{aligned} \int_2^7 x e^{-5x} dx &= -\frac{x}{5} e^{-5x} \Big|_2^7 - \left(-\frac{1}{5} \int_2^7 e^{-5x} dx \right) \\ &= -\frac{7}{5} e^{-35} + \frac{2}{5} e^{-10} - \frac{1}{25} e^{-5x} \Big|_2^7 \\ &= -\frac{7}{5} e^{-35} + \frac{2}{5} e^{-10} - \frac{1}{25} (e^{-35} - e^{-10}) \\ &= -\frac{36}{25} e^{-35} + \frac{11}{25} e^{-10}. \end{aligned}$$

b) U ovom slučaju stavićemo $u = x^2$ i $dv = \sin(3x) dx$, $du = 2x dx$ i

$$v = \int \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x).$$

Iz (6.22) tada sledi:

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} x^2 \sin(3x) dx &= -\frac{1}{3}x^2 \cos(3x) \Big|_0^{1/2} - \left(-\frac{2}{3} \int_0^{1/2} x \cos(3x) dx\right) \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{1/2} x \cos(3x) dx\end{aligned}$$

Poslednji integral ćemo takođe rešiti parcijalnom integracijom, tako što ćemo staviti $u_1 = x$ i $dv_1 = \cos(3x) dx$, odnosno $du_1 = dx$ i $v_1 = \frac{1}{3} \sin(3x)$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} x \cos(3x) dx &= \frac{x}{3} \sin(3x) \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{3} \int_0^{1/2} \sin(3x) dx \\ &= \frac{1}{6} \sin\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{0}{3} \sin(3 \cdot 0) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \Big|_0^{1/2}\right) \\ &= -\frac{1}{6} - \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Konačno je

$$\int_0^{1/2} x^2 \sin(3x) dx = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{27}.$$

c) Neka je $u = \ln x$, $dv = x dx$, tj. $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Tako se dobija

$$\begin{aligned}\int_1^2 x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \\ &= 2 \ln 2 - 3/4.\end{aligned}$$

Primer 6.8. Izračunaćemo sledeće određene integrale za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$I_n = \int_0^{1/2} \cos^n x dx; \quad J_n = \int_0^{1/2} \sin^n x dx.$$

Pokažimo prvo da je za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $I_n = J_n$. Zaista, smenom $t = \frac{1}{2} - x$, $dt = -dx$ dobijamo

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{1/2} \sin^n x dx = \int_0^{1/2} \cos^n \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = -\int_{1/2}^0 \cos^n t dt \\ &= \int_0^{1/2} \cos^n x dx = J_n.\end{aligned}$$

Dakle, dovoljno je izračunati samo integrale I_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za $n = 0$ je

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x dx = \int_0^{\pi/2} dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}, \quad (6.23)$$

a za $n = 1$ je

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1. \quad (6.24)$$

Neka je sada $n \geq 2$. Ako primenimo parcijalnu integraciju: $u = \cos^{n-1} x$ i $dv = \cos x dx$, onda je $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x dx$ i $v = \sin x$, pa dobijamo

$$\begin{aligned} I_n &= \cos^{n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx. \end{aligned}$$

Na osnovu toga je $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, odnosno

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (6.25)$$

Ako je $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, tada iz (6.25) i (6.23) dobijamo

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \cdot I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdot I_{2p-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2p-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ako je $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, tada iz (6.25) i (6.24) sledi

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \cdot I_{2p-1} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdot I_{2p-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{1}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{(2p)(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} \cdot 1. \end{aligned}$$

6.8 Primene određenog integrala

6.8.1 Površina ravnih figura

Površina figure u ravni određena jednom funkcijom

Neka je data neprekidna funkcija $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ koja je nenegativna nad $[a, b]$. Na osnovu definicije određenog integrala možemo reći da je površina P krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a, b]$, tj. površina figure ograničena sa grafikom funkcije f , ordinatama $x = a$ i $x = b$, kao i intervalom $[a, b]$ na x -osi (sl. 6.2.), jednaka određenom integralu funkcije f na $[a, b]$, tj.

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$

Primer 6.9. Odredićemo površinu ograničenu krivom $y = \ln x$, x -osom i pravom $x = e$ (sl. 6.12.). Na $[a, b]$ funkcija je nenegativna, tako da je tražena površina

$$P = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = e \ln e - e - 1 \cdot \ln 1 + 1 = 1.$$

(Integral $\int \ln x dx$ rešavali smo parcijalnom integracijom.)

U slučaju kada je funkcija f negativna na $[a, b]$, tada se površina krivolinijskog trapeza funkcije f nad $[a, b]$ određuje kao

Primer 6.10. Odredićemo površinu ograničenu krivom $y = x^2 - 4$ i x -osom (sl. 6.13).

$$P = \left| \int_a^b f(x) dx \right|, \text{ ili } \int_a^b |f(x)| dx.$$

Funkcija $f(x) = x^2 - 4$ ima nule $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Na intervalu $(-2, 2)$ data funkcija je negativna, te je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_{-2}^2 \right| = \left| \frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 4 \cdot (-2) \right) \right| \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Primer 6.11. Odredićemo površinu ograničenu sinusoidom $y = \sin x$ i intervalom $[0, 2\pi]$ na x -osi. Na intervalu $(0, \pi)$ funkcija $f(x) = \sin x$ je pozitivna, dok je na $(\pi, 2\pi)$ ona negativna. Tako je tražena površina jednaka

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = (-\cos x) \Big|_0^{\pi} + \left| (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = 2 + |-2| \\ &= 4. \end{aligned}$$

Naravno, traženu površinu mogli smo tražiti i kao $P = 2 \int_0^2 \sin x dx = 2 \cdot 2 = 4$.

Primitimo da je $\int_0^2 \sin x dx = 0$, a, kako smo videli, površina slike ograničene krivom $y = \sin x$ i intervalom $[0, 2]$ na x -osi je jednaka 4.

Površina između krivih

Ako su f i g neprekidne funkcije na $[a, b]$ i važi $f(x) \geq g(x)$, za sve $x \in [a, b]$, tada je površina ograničena krivama f i g i ordinatama u tačkama a i b jednaka

$$P = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Primer 6.12. Odredićemo površinu ograničenu krivim linijama $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$ (sl. 6.14.).

Tačke u kojima se date krive seku određuju se rešavanjem sistema jednačina

$$y = x^2, \quad y = \sqrt{x},$$

odakle se dobija jednačina $x^2 = \sqrt{x}$, čija su rešenja $x_1 = 0$, i $x_2 = 1$. Znači, date krive se seku u tačkama $O(0, 0)$ i $A(1, 1)$ (videti sl. 6.15.). Tražena površina P se dobija kao razlika $P = P_1 - P_2$, gde je

$$P_1 = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}, \quad P_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Primer 6.13. Odredićemo površinu ograničenu sa krivom $y = x^3$ i pravama $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ (sl. 6.16). Presek pravih $y = 6 + x$ i $2y + x = 0$ je tačka $A(-4, 2)$, a presek krive $y = x^3$ sa pravom $2y + x = 0$ je tačka $O(0, 0)$ (koordinatni početak), dok je presek krive $y = x^3$ sa pravom $y = 6 + x$ tačka $B(2, 8)$. Svaka od ovih presečnih tačaka dobija se rešavanjem odgovarajućih sistema jednačina:

$$A: y = 6 + x \text{ i } 2y + x = 0; \quad B: y = 6 + x, \text{ i } y = x^3; \quad O: y = x^3 \text{ i } 2y + x = 0.$$

Tražena površina se dobija kao zbir $P = P_1 + P_2$, gde je

$$P_1 = \int_{-4}^0 \left(6 + x - \left(-\frac{x}{2}\right)\right) dx = \int_{-4}^0 \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right) \Big|_{-4}^0 = 12,$$

$$P_2 = \int_0^2 (6 + x - x^3) dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^2 = 12 + 2 - 4 = 10.$$

Prema tome je $P = P_1 + P_2 = 12 + 10 = 22$.

Primer 6.14. Odredićemo površinu ograničenu parabolama $y = x^2 - 2x$ i $y = 6x - x^2$ (sl. 6.17).

Rešavanjem datog sistema jednačina dobijamo da se date parabole seku u tačkama $O(0,0)$ i $A(4,8)$. Parabola $y = x^2 - 2x$ ima nule u tačkama $x = 0$ i $x = 2$, i negativna je na intervalu $(0,2)$, dok parabola $y = 6x - x^2$ ima nule u tačkama $x = 0$ i $x = 6$. Zbog toga se tražena površina određuje kao $P = P_1 + P_2 - P_3$, gde su

$$P_1 = \int_0^4 (6x - x^2) dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 48 - \frac{64}{3} = \frac{80}{3},$$

$$P_2 = \left| \int_0^2 (x^2 - 2x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 \right| = \left| \frac{8}{3} - 4 \right| = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3},$$

$$P_3 = \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^4 = \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}.$$

Prema tome je $P = 80/3 + 4/3 - 20/3 = 64/3$.

Slika 6.17.

Slika 6.18.

Kriva u polarnim koordinatama

Neka je u r -ravni data kriva u polarnim koordinatama $r = f(\theta)$, gde je f neprekidna funkcija promenljive θ (sl. 6.18). (Podsetimo se da je tačka A u ravni određena uređenim parom (r, θ) gde je r odstojanje tačke A od koordinatnog početka O , dok je θ ugao između OA i pozitivnog smera x -ose.)

Odredićemo površinu "krivolinijskog isečka", naime površinu ograničenu pravim linijama $\theta = a$, $\theta = b$, gde je $0 \leq a < b \leq 2\pi$ i grafikom funkcije $r = f(\theta)$. Izvršimo podelu \mathcal{P} ugla $[a, b]$ pomoću polupravih koje sa pozitivnim smerom x -ose zaklapaju uglove $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ na sledeći način $a = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n = b$. I neka je $r_i = r(\theta_{i-1})$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Time smo dati "krivolinijski isečak" podelili na "male" krivolinijske isečke A_i (sl. 5.10). Neka su $f(u_i)$ i $f(v_i)$ minimalna i maksimalna vrednost funkcije f na intervalu $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. Tada važi

$$\frac{1}{2}(f(u_i))^2 r_i \leq A_i \leq \frac{1}{2}(f(v_i))^2 r_i,$$

što povlači

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(u_i))^2 r_i \leq \sum_{i=1}^n A_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(f(v_i))^2 r_i.$$

Ako sa povećanjem broja n tj. kada $n \rightarrow \infty$, parametar podele teži nuli: $(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq i \leq n} \theta_i \rightarrow 0$, tada svaki ugao $\theta_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, pa je površina posmatranog

krivolinijskog isečka data sa

$$P = \lim_{(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(u_i))^2 \Delta x_i = \lim_{(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (f(v_i))^2 \Delta x_i = \frac{1}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

ako prethodne granične vrednosti postoje.

Primer 6.15. Izračunaćemo površinu Bernulijeve lemniskate date u polarnim koordinatama $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$ (sl. 1.39). Ako su x i y date u polarnim koordinatama, tj. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, tada se površina ograničena sa krivom $r = f(\theta)$ i polupravama $\theta = \theta_1$ i $\theta = \theta_2$ izračunava po formuli

$$P = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (f(\theta))^2 d\theta.$$

Da bi u našem slučaju odredili granice integracije, tj. θ_1 i θ_2 , rešićemo jednačinu $a\sqrt{\cos(2\theta)} = 0$ uz uslov $|\cos(2\theta)| \leq 1/2$. Takva rešenja su $\theta_1 = -\pi/4$ i $\theta_2 = \pi/4$, pa je tražena površina

$$P = 2 \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos(2\theta) d\theta \right) = a^2.$$

Primer 6.16. Izračunaćemo površinu kardioide date u polarnim koordinatama sa $r = a(1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ako je a pozitivan parametar (sl. 1.38.).

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \left(\theta + 2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} a^2.$$

Parametarski zadata kriva

Neka je kriva C u ravni data u parametarskom obliku tj. $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in (a, b)$ i $g(a) = a$, $g(b) = b$. Tada se površina krivolinijskog trapeza određenog krivom C nad $[a, b]$ određuje kao

$$P = \int_a^b y dx = \int_a^b h(t) g'(t) dt. \quad (6.26)$$

Primer 6.17. Izračunaćemo površinu ograničenu jednim lukom cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ ($a > 0$), i x -osom (sl. 1.34).

Primitimo da je za $t = 0$ $x = 0$ i $y = 0$, a da je za $t = 2\pi$, $x = a$ i $y = 0$. To znači da je grafik date funkcije iznad x -ose nad $[0, a]$, odnosno za $t \in [0, 2\pi]$. Dakle,

tražena površina je $P = \int_0^a y dx$. Kako je $dx = a(1 - \cos t) dt$, to se može pisati

$$\begin{aligned} P &= \int_0^2 a(1 - \cos t)a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^2 = 3 a^2. \end{aligned}$$

Primer 6.18. Izračunaćemo površinu ograničenu astroidom $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$. Lako je videti (sl. 1.35) da kada t prođe interval $[0, 2\pi]$, tada se u ravni dobija zatvorena kriva koja se sastoji od četiri podudarna dela. Zato je tražena površina

$$\begin{aligned} P &= 4 \int_{\pi/2}^0 y(t) dx(t) = 4 \int_{\pi/2}^0 y(t) x'(t) dt = 4 \int_{\pi/2}^0 (-3a^2) \sin^4 t \cos^2 t dt \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos 2t)^2}{4} \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{12a^2}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t) dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} - \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 4t}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin 2t - \frac{\sin^3 2t}{3} \right) \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{3 a^2}{8}. \end{aligned}$$

6.8.2 Zapremina obrtnih tela

Neka telo nastaje obrtanjem grafika nenegativne neprekidne funkcije $y = f(x)$ oko x -ose nad $[a, b]$. U cilju određivanja zapremine tako nastalog tela, izvršićemo podelu zatvorenog intervala $[a, b]$ na podintervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, i označiti sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (sl. 6.19). Na svakom od podintervala posmatramo pravougaonik čija je jedna stranica podinterval $[x_{i-1}, x_i]$ dužine Δx_i , a druga stranica jednaka vrednosti funkcije f u proizvoljnoj tački podintervala x_i , tj. jednaka $f(x_i)$, $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Svaki od tih pravougaonika obrtanjem oko x -ose obrazuje valjak visine Δx_i , sa poluprečnicima osnove jednak $f(x_i)$. Kako je zapremina svakog valjka $(f(x_i))^2 \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, to možemo pisati

$$V = \lim_{(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(x_i))^2 \Delta x_i,$$

što daje

$$V = \int_a^b (f(x))^2 dx. \quad (6.27)$$

Primer 6.19. Odredićemo zapreminu tela koje nastaje obrtanjem parabole $y = x^2 + 1$ nad $[-1, 1]$ oko x -ose. Imamo:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 (x^2 + 1)^2 dx = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{56}{15}. \end{aligned}$$

Ako telo nastaje obrtanjem grafika neprekidne funkcije $x = g(y)$ za $x \geq 0$ oko y -ose nad $[c, d]$, tada je njegova zapremina

$$V = \int_c^d (g(y))^2 dy.$$

Primer 6.20. Odredićemo zapreminu tela koje nastaje obrtanjem kubne parabole $y = x^3$ nad intervalom $[1, 8]$ oko y -ose. Iz $x = \sqrt[3]{y}$, sledi

$$V = \int_1^8 (y^{1/3})^2 dy = \int_1^8 y^{2/3} dy = \left(\frac{3y^{5/3}}{5} \right) \Big|_1^8 = \frac{93}{5}.$$

Primer 6.21. Odredićemo zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine ograničene parabolom $y = x^2 + 2$ i $y = \frac{x}{2} + 1$ nad intervalom $[0, 1]$ oko x -ose (sl. 5.12).

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left((x^2 + 2)^2 - \left(\frac{x}{2} + 1 \right)^2 \right) dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3 \right) dx \\ &= \left(\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^1 = \frac{79}{20}. \end{aligned}$$

Primer 6.22. Odredićemo zapreminu tela koje nastaje obrtanjem površine ograničene krivom $y = \frac{1}{8}x^3$ i pravom $y = 2x$ oko y -ose.

Presečne tačke datih krivih su $O(0, 0)$, $A(4, 8)$ i $B(-4, -8)$. Kako se date krive mogu zapisati u obliku $x = 2\sqrt[3]{y}$, odnosno $x = \frac{y}{2}$, to je zbog njihove neparnosti:

$$V = 2 \int_0^8 \left(4y^{2/3} - \frac{1}{4}y^2 \right) dy = 2 \left(\frac{12y^{5/3}}{5} - \frac{y^3}{12} \right) \Big|_0^8 = \frac{1024}{15}.$$

Primer 6.23. Odredićemo zapreminu torusa koji se dobija obrtanjem kružnice $x^2 + (y - a)^2 = r^2$, oko x -ose, ako je $0 < r < a$.

Označimo sa f_1 i f_2 redom funkcije date sa

$$f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{i} \quad f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |x| \leq r.$$

Tada je tražena zapremina $V = V_1 - V_2$, gde je

$$V_1 = \int_{-r}^r f_1^2(x) dx \quad \text{i} \quad V_2 = \int_{-r}^r f_2^2(x) dx.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \left((a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) dx \\ &= \int_{-r}^r \left(a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 - x^2 - a^2 + 2a\sqrt{r^2 - x^2} - r^2 + x^2 \right) dx \\ &= 4a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 8a \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Poslednji integral se rešava smenom $x = r \sin t$, $dx = r \cos t dt$, te je

$$V = 8a r^2 \int_0^{/2} \cos^2 t dt = 8 r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{/2} = 8a r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2a r^2 \pi.$$

6.8.3 Dužina luka krive

Neka funkcija f ima neprekidan prvi izvod na $[a, b]$. Dužina luka ℓ date krive od tačke $A(a, f(a))$ do tačke $B(b, f(b))$ određuje se pomoću određenog integrala na sledeći način (sl. 6.20).

Slika 6.20.

Neka je \mathcal{P} podela intervala $[a, b]$, tj. neka je $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ i neka je (\mathcal{P}) parametar podele \mathcal{P} . Kao i ranije, stavimo s_i za dužinu i -tog intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Odredimo u deonim tačkama x_i ordinate $f(x_i)$, koje na krivoj određuju tačke Q_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Posmatračemo izlomljenu liniju $Q_0 Q_1 Q_2 \dots Q_n$, sa delovima $Q_{i-1} Q_i$, čije su dužine s_i . Tada je dužina luka krive od tačke A do B približno jednaka dužini izlomljene linije $Q_0 Q_1 Q_2 \dots Q_n$. Zbog toga se za dužinu luka nad intervalom uzima granična vrednost

$$\ell = \lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n s_i,$$

ako ta granica postoji.

Na osnovu Lagranžove teoreme srednje vrednosti postoji tačka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takva da važi

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot s_i.$$

Tako relacija

$$s_i = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + x_i^2},$$

postaje $s_i = \sqrt{(f'(x_i))^2 + 1} \cdot x_i$. Odavde je

$$\ell = \lim_{(P) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n s_i = \lim_{(P) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \sqrt{(f'(x_i))^2 + 1} \cdot x_i.$$

Prema tome, dužina luka krive se određuje po formuli

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (6.28)$$

Primer 6.24. Odredićemo dužinu luka krive $f(x) = 3x^{2/3} - 10$ od tačke $A(8, 2)$ do tačke $B(27, 17)$.

Kako je $f'(x) = 2x^{-1/3}$, to je tražena dužina luka

$$\ell = \int_8^{27} \sqrt{1 + (2x^{-1/3})^2} dx = \int_8^{27} \sqrt{1 + \frac{4}{x^{2/3}}} dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{4 + x^{2/3}}}{x^{1/3}} dx.$$

Poslednji integral se rešava smenom $t = x^{2/3} + 4$, $dt = \frac{2}{3}x^{-1/3} dx$, pri čemu je za $x = 8$, $t = 8$, a za $x = 27$, $t = 13$. Tako se dobija

$$\ell = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{t} dt = t^{3/2} \Big|_8^{13} = \sqrt{13^3} - \sqrt{8^3} \approx 24,245.$$

Primer 6.25. Odredićemo dužinu luka krive $f(x) = \ln x$ od tačke $A(1, 0)$ do tačke $B(\sqrt{3}, \ln 3/2)$.

Kako je $f'(x) = 1/x$, to je

$$\ell = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx.$$

Uvodeći smenu $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, dobijamo $\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos t}$, a nove granice integracije postaju $\pi/4$ i $\pi/3$. Sledi da je

$$\begin{aligned} \ell &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t} dt \\ &= \left(\frac{1}{\cos t} + \ln |\operatorname{tg}(t/2)| \right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Neka je kriva data u parametarskom obliku $x = g(t)$, $y = h(t)$, $t \in (,)$, gde su funkcije g i h neprekidno diferencijabilne nad intervalom $[,]$ i važi $g() = a$, $g() = b$. Tada se dužina luka te krive nad intervalom izračunava prema formuli

$$\ell = \int \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} dt. \quad (6.29)$$

Primer 6.26. Odredićemo dužinu luka astroide $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, ako je a pozitivan parametar (sl. 1.35).

Kako je $x'_t = 3a \sin^2 t \cos t$ i $y'_t = -3a \cos^2 t \sin t$, to je

$$\begin{aligned} \ell &= 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = 4 \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2(\sin^4 t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^4 t)} dt \\ &= 12a \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 12a \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{2\pi} = 6a. \end{aligned}$$

6.8.4 Površina obrtnih tela

Neka telo nastaje obrtanjem grafika nenegativne krive $y = f(x)$ oko x -ose nad $[a, b]$, nad kojim funkcija f ima neprekidan prvi izvod. Podelimo $[a, b]$ na podintervale $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, i, kao i ranije, označimo sa $s_i = x_i - x_{i-1}$. Na svakom od podintervala posmatrajmo trapez ograničen sa intervalom $[x_{i-1}, x_i]$ na x -osi, ordinatama dužine $f(x_{i-1})$ i $f(x_i)$, i duž s_i koja spaja tačke na krivoj određene ordinatama u tačkama x_i i x_{i-1} , odnosno tačke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$. Svaki od tih trapeza pri rotaciji oko x -ose obrazuje zarubljenu kupu čiji su poluprečnici osnova $f(x_i)$ i $f(x_{i-1})$, a izvodnica s_i . Površina omotača takve zarubljene kupe je $P_{oi} = (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot s_i$. Prema tome, ako je (\mathcal{P}) parametar podele, tada je površina omotača M posmatranog obrtnog tela jednaka

$$M = \lim_{(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot s_i,$$

što daje

$$M = 2 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (6.30)$$

Primer 6.27. Odredićemo površinu omotača tela koje nastaje obrtanjem oko x -ose krive $y^2 = 12x$ od tačke $x = 0$ do tačke $x = 3$. Na osnovu (6.30), tražena površina

jednaka je

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^3 y \sqrt{1 + (y')^2} dx = 2 \int_0^3 \sqrt{36 + 12x} dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \frac{(36 + 12x)^{3/2}}{3} \Big|_0^3 = 24(2\sqrt{2} - 1) . \end{aligned}$$

Primer 6.28. Proverićemo da je površina lopte poluprečnika a jednaka $M = 4 a^2$.

Posmatraćemo samo gornji deo kružnice date u parametarskom obliku $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, koja se obrće oko x -ose. Tako dobijamo loptu čija je površina

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi 2 a \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = 2 a^2 \int_0^\pi \sin t dt \\ &= -2 a^2 \cos t \Big|_0^\pi = -2 a^2(-1 - 1) = 4 a^2 . \end{aligned}$$

Primer 6.29. Odredićemo površinu omotača tela koje nastaje rotacijom oko y -ose krive $x = y^3$ od tačke $x = 0$ do tačke $x = 8$. Odgovarajuće vrednosti za $x = 0$ i $x = 8$ su redom $y = 0$ i $y = 2$, pa je tražena površina jednaka:

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^8 x \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy = 2 \int_0^2 y^3 \sqrt{1 + 9y^4} dy = \frac{2}{36} \int_1^{145} \sqrt{u} du \\ &= \frac{2}{27} (\sqrt{145^3} - 1) . \end{aligned}$$

Literatura!!!!!!

Indeks

- Abelova grupa, 8
- apsolutna vrednost, 22
- asimptota
 - horizontalna, 91
 - kosa, 91
 - vertikalna, 92
- asimptota grafika funkcije, 91
- asimptotsko ponašanje funkcije, 92
- astroida, 242

- Bernulijeva lemniskata, 42, 241
- Bernulijeva nejednakost, 16
- bijekcija, 6
- binomna formula, 16
- brojevi
 - celi, 8, 17
 - iracionalni, 18
 - prirodni, 8, 13
 - racionalni, 8, 18
 - realni, 8

- cikloida, 242

- definicioni skup funkcije, 5
- Dekartov proizvod, 4
- diferencijabilna funkcija
 - na skupu, 109
 - u tački, 108
- diferencijal funkcije, 128
- divergentan niz, 51
- donja (Darbuova) suma, 213
- drugi izvod funkcije u tački, 131

- eksponencijalna funkcija, 39
- elementarna funkcija, 40

- funkcija, 5
 - neopadajuća, 30
 - nerastuća, 30
 - opadajuća, 30
 - rastuća, 30
 - diferencijabilna na skupu, 109
 - diferencijabilna u tački, 108
 - eksponencijalna, 39
 - ekstremna vrednost, 30, 134
 - granična vrednost, 70
 - integrabilna, 211
 - inverzna, 6
 - konkavna, 161
 - konveksna, 161
 - logaritamska, 39
 - neprekidna na skupu, 95
 - neprekidna u tački, 94
 - složena, 6
 - stepena, 39
 - trigonometrijska, 39
 - uniformno neprekidna, 104

- gornja (Darbuova) suma, 213
- grafik funkcije, 7, 28
- granična vrednost funkcije
 - desna, 75
 - leva, 75
- granična vrednost niza, 44
- grupa, 8

- harmonijski niz, 64
 Helderova nejednakost, 159
 Hornerova shema, 33

 infimum skupa, 12
 injekcija, 6
 interval, 22
 - neograničen, 22
 - otvoren, 22
 - zatvoren, 22
 inverzna trigonometrijska funkcija, 40
 iskaz, 1
 iskazna algebra, 2
 iskazna formula, 2
 izolovana tačka skupa, 25
 izvod
 - inverzne funkcije, 121
 - parametarske funkcije, 126
 Jangova nejednakost, 159

 kardioida, 41, 241
 Koši–Švarcova nejednakost, 159
 Košijev niz, 62
 Košijeva teorema srednje vrednosti, 143
 kodomen funkcije, 5
 kompleksni brojevi, 19
 kompletno uređeno polje, 9
 kompozicija funkcija, 6
 komutativna grupa, 8
 konkavna funkcija, 161
 konveksna funkcija, 161
 konvergentan niz, 44

 Lagranžova teorema, 136
 Lajbnicova formula, 133
 Lebegova teorema, 228
 logaritamska funkcija, 39
 lokalni maksimum, 30
 lokalni minimum, 30
 Lopitalovo pravilo, 153, 155

 Maklorenov polinom, 149
 Maklorenova formula, 149
 maksimum
 - globalni, 142
 - lokalni, 30
 - strogi lokalni, 30
 maksimum skupa, 12
 malo o funkcije, 93
 minimum
 - globalni, 142
 - lokalni, 30
 - strogi lokalni, 30
 minimum skupa, 11

 najveći ceo, 45
 nejednakost
 - Heldera, 159
 - Janga, 159
 - Koši–Švarca, 159
 - Minkovskog, 159
 neodređeni integral, 185
 neparna funkcija, 28
 neprekidnost funkcije
 - u tački, 94
 - uniformna, 104
 niz, 43
 - neopadajući, 52
 - nerastući, 52
 - opadajući, 52
 - rastući, 52
 - divergentan, 51
 - divergentan u $+$, 52
 - divergentan u $-$, 52
 - granična vrednost, 44
 - konvergentan, 44
 - limes inferior, 66
 - limes superior, 66
 - ograničen, 43
 - ograničen odozdo, 66
 - ograničen odozgo, 66

- opšti član, 43
- tačka nagomilavanja, 65
- Njutn–Lajbnicova formula, 230
- normala grafika funkcije, 115
- nula funkcije, 28
- nula polinoma, 32

- određeni integral, 211
- ograničen niz, 43
- ograničena funkcija, 29
- okolina tačke, 24
- osnovni period funkcije, 29

- parametar podele, 210
- parna funkcija, 28
- partitivni skup, 4
- period funkcije, 29
- periodična funkcija, 29
- podintegralna funkcija, 211
- podniz, 65
- pokrivač skupa, 24
- polinom, 32
- polje, 9
- prekid
 - druge vrste, 98
 - prividan, 98
 - prve vrste, 98
- prekidna funkcija u tački, 95
- preslikavanje, 5
- prevojna tačka, 164
- primitivna funkcija, 185
- princip matematičke indukcije, 13
- priraštaj
 - argumenta, 106
 - funkcije, 107
- prirodni definicioni skup funkcije, 27
- prvi izvod funkcije, 109
 - na intervalu, 109
 - u tački, 108

- racionalna funkcija, 35

- realni brojevi, 8
- Rimanova integralna suma, 210
- Rolova teorema, 135

- surjekcija, 6
- skup
 - donje ograničenje, 11
 - gornje ograničenje, 11
 - infimum, 12
 - maksimum, 12
 - minimum, 12
 - ograničen, 12
 - ograničen odozdo, 11
 - ograničen odozgo, 11
 - supremum, 12
- skup celih brojeva, 4
- skup mere nula, 227
- skup prirodnih brojeva, 4
- skup racionalnih brojeva, 4
- skup vrednosti funkcije, 5
- složena funkcija, 6
- supremum skupa, 12

- tačka nagomilavanja
 - niza, 65
 - skupa, 24, 69
- tangenta grafika funkcije, 115
- tautologija, 2
- Tejlorova formula, 147
- teorema o supremumu, 12
- transcedentni brojevi, 19
- trigonometrijska funkcija, 39

- uređen par, 4
- uređeno polje, 9

- veliko O funkcije, 94