Anđal Andor

O beskonačnim kardinalima

- diplomski rad -

Ordinali

- **Definicija.** Za neki skup A kažemo da je ordinal ako važi:
  - $x \in A \Longrightarrow x \subseteq A$;
  - relacija $\in_A = \{\langle x, y\rangle \in A \mid x \in y\}$ je striktno dobro uređenje na A.
- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \ldots$
- **Definicija.** Za ordinal α kažemo da je
  - **naredni** ako za neki ordinal β važi $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. U tom slučaju pišemo $\alpha = \beta^+$ ili $\alpha = \beta + 1$.
  - **granični** ako nije naredni i $\alpha \neq \emptyset$.
- Ne postoji skup koji sadrži sve ordinale, govori se o klasi svih ordinala, koju označavamo sa On.
- Postoji formula na jeziku teorije skupova, koja znači: "α je ordinal". Skraćeni zapis te formule je $\alpha \in \mathrm{On}$, koji ćemo koristiti

- U nastavku navodimo najvažnije teoreme, pomoću kojih možemo da stignemo do definicije kardinala.
- **Teorema.** Na klasi svih ordinala On "relacija" $<$ ima sve osobine striktnog dobrog uređenja, tj. važi
  - irefleksivnost,
  - tranzitivnost,
  - trihotomija,
  - minimalnost.
- **Teorema.** Za striktno dobro uređen skup $\langle A, \lhd \rangle$ postoji tačno jedan ordinal α takav da

$$\langle A, \lhd \rangle \cong \langle \alpha, \in_A \rangle.$$

- **Definicija.** Za striktno dobro uređen skup $\langle A, \lhd \rangle$ označimo sa $\mathrm{type}(\langle A, \lhd \rangle)$ jedinstven ordinal α sa osobinom $\langle A, \lhd \rangle \cong \langle \alpha, \in_A \rangle$. Ordinal $\mathrm{type}(\langle A, \lhd \rangle)$ zovemo <u>ordinalni tip</u> od $\langle A, \lhd \rangle$.

Specijalni ordinali - Prirodni brojevi

- **Definicija.** Za ordinal α kažemo da je prirodan broj ako

$$\forall \beta \leq \alpha \text{ ili } \beta = \emptyset \text{ ili } \beta \text{ je naredni ordinal.}$$

- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \ldots$
- **Teorema.** Elementi prirodnog broja su opet prirodni brojevi.
- **Teorema.** Ako je α prirodan broj, onda je i $\alpha \cup \{\alpha\}$ prirodan broj.
- Ova teorema implicira da su sledeći ordinali prirodni brojevi.

- $0 = \emptyset$,
  $1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,
  $2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$,
  $3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$,
  …
  $n + 1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, \dots, n\}$,
  …
- Klasa svih prirodnih brojeva jeste skup, koji označavamo sa ω, i zadovoljava sve Peanove aksiome.
- Naša formalna definicija prirodnog broja pokriva intuitivan pojam prirodnog broja.
- **Teorema.** Skup ω je najmanji granični ordinal.

Ekvipotentnti skupovi

- **Definicija.** Skupovi A i B su ekvipotentnti ako postoji bijekcija f: $A \to B$ i to označimo sa $A \sim_f B$.
- **Definicija.**
  - $A \preccurlyeq B$ ako postoji injekcija iz A u B,
  - $A \prec B$ ako $A \preccurlyeq B$ i nije $A \sim B$.
- **Teorema.** Ako su A, B i C proizvoljni skupovi, tada je
- a) $A \sim A$;
  b) $A \sim B$ onda $B \sim A$;
  c) $A \sim B$ i $B \sim C$ onda $A \sim C$.
- a) $A \preccurlyeq A$;
  b) $A \preccurlyeq B$ i $B \preccurlyeq A$ onda $A \sim B$ (Šreder–Bernštajn);
  c) $A \preccurlyeq B$ i $B \preccurlyeq C$ onda $A \preccurlyeq C$.
- **Teorema.** (Kantor) Za svaki skup A važi $A \prec P(A)$.

Kardinali kao specijalni ordinali

- **Definicija.** Kardinalni broj (ili samo kardinal) nekog skupa A je najmanji ordinal ekvipotentan skupu A, tj.

$$|A| = min\{\alpha : \alpha \sim A\}$$

- **Definicija.** Za neki ordinal α kažemo da je kardinal ako je

$$\alpha = |\alpha|.$$

- **Posledica.** Za proizvoljan skup A važi $||A|| = |A|$, tj. $|A|$ je jedan skup kardinalnosti $|A|$.
- **Posledica.** Ordinal α je kardinal ako i samo ako za svaki $\beta < \alpha$ važi $\beta \nsim \alpha$.
- **Teorema.** Neka su A i B dva neprazna skupa. Tada važi:

$$|A| \leq |B| \text{ ako i samo ako } A \preccurlyeq B.$$

- **Definicija.** Za skup A kažemo da je
  - konačan ako je ekvipotentan sa nekim prirodnim brojem, tj. $(\exists n \in \omega)\ n \sim A$;
  - beskonačan ako nije konačan.
- **Teorema.** ω je najmanji beskonačan kardinal.
- **Teorema.** Svaki beskonačan kardinal je granični ordinal.
- **Definicija.** Za skup A kažemo da je
  - prebrojivo beskonačan ako je $|A| = \omega$;
  - prebrojiv ako je $|A| \leq \omega$;
  - neprebrojiv ako je $|A| > \omega$.
- **Teorema.** Postoji neprebrojiv skup (kardinal).
- **Definicija.** Kardinalni broj skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ označavamo sa (kontinuum).

Transfinitna indukcija

- U klasi On svih ordinala možemo koristiti princip koji je analogan principu matematičke indukcije.
- To je tzv. princip transfinitne indukcije, i zasniva se na sledećoj teoremi.
- **Teorema.** Neka je Φ neka osobina koja je definisana za sve ordinale. Pretpostavimo da za proizvoljan ordinal α važi:

  Ako su svi ordinali $\beta < \alpha$ imaju osobinu Φ, onda i α ima osobinu Φ.

  Tada osobinu Φ imaju svi ordinali.
- Ova teorema je uopštenje matematičke indukcije u skupu prirodnih brojeva, i ostaje tačno ako umesto ordinala stavimo prirodne brojeve.

Transfinitna rekurzija

- Pokazaćemo da uvek postoji takav operator F za koji $F(\alpha)$ na zadati način zavisi od toga kako smo definisali operator F na ordinalima $\beta < \alpha$.
- **Teorema.** Neka je G operator koji svakoj funkciji f dodeljuje jedan skup $G(f)$. Tada postoji na ordinalima jednoznačno određen operator F takav da za svaki ordinal α važi:

$$F(\alpha) = G(F|\alpha).$$

- To kako je operator F definisan do zadatog α, tačno opisuje funkcija $F|\alpha$, jer ova ne daje samo šta su $F(\beta)$ vrednosti, nego i to kako zavisi $F(\beta)$ od β u slučaju $\beta < \alpha$.
- A mi tražimo takav F za koji $F(\alpha)$ za svaki α na unapred dati "G način" zavisi od toga, kako smo dotle definisali F, odnosno tražimo takav F koji na "G način" zavisi od $F|\alpha$.

Operacija sa kardinalima

- **Definicija.** Neka je $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ kolekcija skupova. Direktan proizvod kolekcije $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ je skup svih funkcija $f \colon \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, takvih da za svako $\gamma \in \Gamma$ važi $f(\gamma) \in A_\gamma$.
- Oznaka: $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$
- **Definicija.** Neka su A i B dva proizvoljna skupa. Tada skup "A na stepenu B" je skup svih preslikavanja skupa B u skup A, tj.

$$^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}.$$

- Oznaka: ^{B}A
- **Teorema.** Za svaki skup A važi: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

- **Definicija.** Neka je $\{\kappa_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ proizvoljna kolekcija kardinalnih brojeva, i κ i λ su kardinalni brojevi. Tada
  - **proizvod kardinalnih brojeva κ_γ**, $\gamma \in \Gamma$, je $|\prod_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma|$.
  - Oznaka: $\prod_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma$.

  - **zbir kardinalnih brojeva κ_γ**, $\gamma \in \Gamma$, je $|\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \kappa\times\{\gamma\}|$.
  - Oznaka: $\sum_{\gamma\in\Gamma} \kappa_\gamma$.

  - **λ-ti stepen kardinalnog broja κ** je $|{}^{\lambda}\kappa|$.
  - Oznaka: κ^λ.
- Oznaka za sabiranje kardinala: $\kappa \oplus \lambda$ umesto $\kappa + \lambda$.
- Oznaka za množenje kardinala: $\kappa \otimes \lambda$ umesto $\kappa \cdot \lambda$.

Osobine kardinala $\aleph_0$

- $\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0{}^{n} = \aleph_0$, $n > 0$

- $n \oplus \aleph_0 = \aleph_0$, $n > 0$
- $n \otimes \aleph_0 = \aleph_0$, $n > 0$

- $2^{\aleph_0} =$

- ${}^{\aleph_0} =$
- $\aleph_0{}^{\aleph_0} =$

Osnovna teorema kardinalne aritmetike

- **Teorema.** Za svaki beskonačan kardinal κ važi
$$\kappa \otimes \kappa = \kappa.$$

- **Teorema.** Za sve kardinale $\kappa, \lambda \geq \omega$ važi
$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

- **Teorema.** Ako su λ i κ takvi kardinali da $\lambda \geq \omega$ i $2 \leq \kappa \leq \lambda$, tada
$$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} = P(\lambda).$$

Alefi

- **Definicija.** Neka je κ proizvoljan kardinal. Najmanji kardinal koji je veći od κ naziva se **naredni kardinal kardinala κ** (sukcesor kardinala κ) i označavamo sa $\kappa^{\oplus}$.

$$\kappa^{\oplus} = \mathit{min}\{\lambda : \lambda < \kappa\}.$$

- **Teorema.** Za proizvoljan $\kappa \geq \omega$ važi da je

$$\kappa^{\oplus} = |\{\xi : |\xi| = \kappa\}|.$$

- **Teorema.** Neka je A proizvoljan skup kardinala. Tada
  - sup A je kardinal,
  - Ako je sup A beskonačan, onda $\sum_{\lambda \in A} \lambda = \sup A$.
- Kantorova teorema garantuje da postoji beskonačno mnogo beskonačnih kardinala.
- Dakle, možemo konstruisati beskonačan rastući niz beskonačnih kardinalnih brojeva:
- $P^0(\omega) = \omega$ i $P^{n+1}(\omega) = P(P^n(\omega))$ ako $n \in \omega$

- $\omega < |P^1(\omega)| < \ldots < |P^n(\omega)| < |P^{n+1}(\omega)| < \ldots$
- Uvodimo nove oznake za beskonačne kardinale. Naime, koristimo ordinale za indeksiranje beskonačnih kardinala u rastuće uređenje:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$$

- **Definicija.** Definišemo operator $\aleph_\alpha$ za ordinal α transfinitnom rekurzijom:
  - $\aleph_0 = \omega$.
  - Neka je $\alpha > 0$ i pretpostavimo da smo $\aleph_\beta$ definisali za svaki ordinal $\beta < \alpha$. Neka je $\aleph_\alpha$ najmanji kardinal κ takav da je $\kappa > \aleph_\beta$ za sve ordinale $\beta < \alpha$.
- $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\omega, \omega_{\omega+1}, \omega_{\omega+2}, \ldots$

- **Teorema.**
  - $\aleph_\alpha$ je beskonačan kardinal.
  - Za sve ordinale α i β važi: ako je $\alpha < \beta$ onda je $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.
  - Ako je α granični ordinal tada $\aleph_\alpha = \sup \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$.
  - Za svaki ordinal α je $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^\oplus$, tj. $\aleph_{\alpha+1}$ je najmanji kardinal veći od $\aleph_\alpha$.
- **Teorema.** Za beskonačan kardinal κ postoji ordinal $\alpha \leq \kappa$ takav da je $\kappa = \aleph_\alpha$.

- **Definicija.** Beskonačan kardinal κ se naziva **naredni kardinal** ako $\kappa = \lambda^{\oplus}$, za proizvoljan kardinal λ. U suprotnom, tj. ako κ nije naredni, i $\kappa \neq 0$, zove se **granični kardinal**.

  Za kardinal κ se kaže da je jako granični kardinal ako važi da

$$\forall\lambda < \kappa \;\; 2^{\lambda} < \kappa.$$

- Svaki jako granični kardinal je jedan granični kardinal, jer za svaki kardinal λ važi

$$\lambda^{\oplus} \leq 2^{\lambda}.$$

- Za svaki ordinal α
  - $\aleph_{\alpha}$ je naredni kardinal akko je α naredni ordinal,
  - $\aleph_{\alpha}$ je granični kardinal akko je α granični ordinal.

Kofinalnost

- **Definicija.** Neka je $\langle A, \lhd \rangle$ striktno uređen skup i $B \subseteq A$. Kažemo da je A **kofinalan** sa B ako

$$\forall x \in A\ \exists y \in B\ \ x \unlhd y.$$

- Npr, $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ je kofinalan sa ω, ili $\omega \cup \{\omega\}$ je kofinalan sa $\{\omega\}$.
- **Teorema.** (Hauzdorfova teorema) Proizvoljan striktno uređen skup $\langle A, \lhd \rangle$ je kofinalan sa skupom $B \subset A$ za koji važi:
  - $\langle B, \lhd \rangle$ je dobro uređen,
  - $\mathrm{type}(\langle B, \lhd \rangle) \leq |A|$.

- **Definicija.** Neka je $\langle A, \lhd \rangle$ proizvoljan striktno uređen skup. Najmanji ordinal ξ za koji je $\langle A, \lhd \rangle$ kofinalan sa nekim striktno dobro uređenim podskupom B ordinalnog tipa ξ se naziva **kofinalnost skupa $\langle A, \lhd \rangle$,** označava sa $\mathrm{cf}(\langle A, \lhd \rangle)$.

- $\mathrm{cf}(\langle A, \lhd \rangle) = \xi$ ako su sledeći uslovi zadovoljeni:
  - $\langle A, \lhd \rangle$ kofinalan sa nekim $B \subset A$,
  - B je striktno dobro uređen,
  - $\mathrm{type}(\langle B, \lhd \rangle) = \xi$,
  - ξ je najmanji ordinal sa prethodnim osobinama.

- Dobra definisanost $\mathrm{cf}(\langle A, \lhd \rangle)$ za neki striktno uređen skup sledi iz prethodne teoreme i važi

$$\mathrm{cf}(\langle A, \lhd \rangle) \leq |A|.$$

- $\langle A, \lhd\rangle \cong \langle A^*, \lhd^*\rangle \Rightarrow \mathrm{cf}(\langle A, \lhd\rangle) = \mathrm{cf}(\langle A^*, \lhd^*\rangle)$.

- **Definicija.** Neka je ξ proizvoljan ordinal. Tada kofinalnost ordinala ξ
$$\mathrm{cf}(\xi) = \mathrm{cf}(\langle A, \lhd\rangle),$$
gde je $\langle A, \lhd\rangle$ takav striktno dobro uređen skup da je
$$\mathrm{type}(\langle A, \lhd\rangle) = \xi.$$

- $\mathrm{cf}(\langle A, \lhd\rangle) = 1$ ako i samo ako $\langle A, \lhd\rangle$ ima poslednji element.
- Ako $\langle A, \lhd\rangle$ nema poslednji element i $A \neq \emptyset$, onda $\mathrm{cf}(\langle A, \lhd\rangle) \geq \omega$.
- Primeri:
  - $\mathrm{cf}(n) = 1$ ako $n > 0$ i $n \in \omega$,
  - $\mathrm{cf}(\omega) = \omega$,
  - $\mathrm{cf}(\omega_\omega) = \omega$, jer je $\langle \omega_\omega, <\rangle$ kofinalan sa $\{\omega_n : n \in \omega\}$.

- **Definicija.** Neka je ξ proizvoljan ordinal. Tada kažemo da je ξ
  - regularan, ako je $cf(\xi) = \xi > 1$,
  - singularan, ako je $1 < cf(\xi) < \xi$.

- Primeri:
  - ω je regularan, ω_ω i $\omega + \omega$ su singularni,
  - $n \in \omega$ i $\omega + 1$ nisu ni regularni ni singularni.
- **Teorema.**
  - Za proizvoljan ordinal $\xi \neq 0$, $cf(\xi)$ je ili 1 ili regularan ordinal.
  - Svaki regularan ordinal je beskonačan kardinal.
- **Posledica.** Svaki naredni kardinal je regularan.

- Nije svaki regularan kardinal naredni kardinal, npr. ω je regularan granični kardinal. Postavlja se pitanje:
  - Da li postoje regularni granični kardinali veći od ω?
- Takvi kardinali se nazivaju <u>slabo nedostižni kardinali</u>.
- Ako za slabo nedostižan kardinal κ važi i sledeći uslov

$$\forall\lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa)$$

  onda se govori o <u>jako nedostižnom kardinalu</u>.
- **Definicija.**
  - **<u>Slabo nedostižni kardinali</u>** - neprebrojivi regularni granični kardinali (Hausdorff, 1908.),
  - **<u>jako nedostižni kardinali</u>** - neprebrojivi regularni jako granični kardinali (Tarski, 1930.).

- **Teorema.** Ako je κ proizvoljan beskonačan kardinal, onda je $cf(\kappa)$ najmanji ordinal α, za koji se može naći niz kardinala $\{\kappa_\xi < \kappa : \xi < \alpha\}$, takav da
$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi = \kappa.$$
- **Teorema.** Ako je $\langle A, \lhd\rangle$ proizvoljan striktno uređen skup, $B, C \subset A$ i A je kofinalan i sa B i sa C, onda je
$$cf(\langle B, \lhd\rangle) = cf(\langle C, \lhd\rangle).$$
- **Posledica.** Ako je κ granični kardinal, onda se može naći jedan strogo monotono rastući niz kardinala $\{\kappa_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ takav da
$$\sum_{\xi<cf(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa.$$
- **Posledica.** Ako je α granični ordinal, onda
$$cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha).$$

Stepenovanje kardinala

- Videli smo da zbir i proizvod dva beskonačna kardinala uvek možemo odrediti.
- Stepenovanje, tj. određivanje vrednost izraza λ^{κ}, dovodi do težih problema!
- Na osnovu Kantorove teoreme znamo da $2^{\kappa} > \kappa$.
- Pa postavlja se pitanje:

  Da li je tačna jednakost $2^{\kappa} = \kappa^{\oplus}$?
- Matematičari su posebno ispitivali osobine kardinala $2^{\aleph_0}$.
- Kardinalnost skupa realnih brojeva je baš $2^{\aleph_0}$, tj.

  $= 2^{\aleph_0}$.

- Problem kontinuuma:

  Sa kojim kardinalom je jednak $2^{\aleph_0}$?

- Kontinuum hipoteza (CH):

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

- Slično, za svaki ordinal α, imamo: $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$
- Uopšteni problem kontinuuma:

  Sa kojim kardinalom je jednak $2^{\aleph_\alpha}$?

- Uopštena kontinuum hipoteza (GCH):

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

- **Teorema.** (Gedel, 1939.)
  GCH je saglasna sa teorijom ZF,
  ZF neprotivrečna $\Longrightarrow$ ZF+GCH neprotivrečna.

- **Teorema.** (Koen, 1963.)
  ZF neprotivrečna $\Longrightarrow$ ZF + $\neg$CH neprotivrečna.
  Prema tome, CH je nezavisna od ZF teorije skupova.

- Jedino zaključivanje za $2^{\aleph_0}$ je to da $2^{\aleph_0} \neq \kappa$ ako je $cf(\kappa) = \omega$, što ćemo i mi videti u nastavku.

Kenigova teorema i posledice

- **Teorema.** (Kenig) Neka su $\{\lambda_\xi : \xi < \alpha\}$ i $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ dve kolekcije kardinala tako da $\lambda_\xi < \kappa_\xi$ za svaki $\xi < \alpha$. Tada važi
$$\sum_{\xi<\alpha} \lambda_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$$
- **Posledica.** Ako je $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ strogo rastući niz kardinala, gde je α granični ordinal i $\kappa_0 > 0$, tada važi
$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$$
- **Posledica.** Ako je κ proizvoljan beskonačan kardinal, onda važi
$$\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa.$$
- **Posledica.** Neka su κ i λ kardinali, za koje važi da $\kappa \geq \omega$ i $\lambda \geq 2$. Tada je
$$cf(\lambda^\kappa) > \kappa.$$

- **Posledica.** Neka su κ i λ kardinali, za koje važi da $\kappa \geq \omega$ i $\lambda \geq 2$. Tada je
$$\mathrm{cf}(\lambda^{\kappa}) > \kappa.$$
- Specijalan slučaj:
$$\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \neq \aleph_0$$
- Kako je $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$,
$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$$
- Ako je $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$, za proizvoljan kardinal κ:
$$\kappa \neq 2^{\aleph_0}$$
- $\kappa = \aleph_{\omega+\omega}, \aleph_{\omega+\omega+\omega}, \ldots$
- $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega+\omega}) = \aleph_0$, $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega+\omega+\omega}) = \aleph_0$, ...
- Najvažnija posledica teoreme Keniga: sigurno znamo o nekim kardinalima da nisu jednaki sa .
- Teorema ne daje nikakvu instrukciju za određivanje vrednosti kontinuuma . Sistem aksioma ZFC to ne zna da odluči.

Bernštajn – Hauzdorf – Tarski - teorema

- **Teorema.** Neka su κ i λ kardinali za koje važi $\kappa \geq \omega$ i $0 < \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Tada je
$$\kappa^\lambda = (\textstyle\sum_{\tau<\kappa} \tau^\lambda) \otimes \kappa$$
gde τ "trči" po kardinalima.
- Originalna formulacija Bernštajnove teoreme:
$$\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_n$$
- Ako pretpostavljamo da važi CH, onda
$$\aleph_n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \otimes \aleph_n = \aleph_n,$$
gde je $1 \leq n < \omega$.
- $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0 \implies \aleph_n^{\aleph_0}$ ne znamo iz teoreme!
- Posledica Kenigova teorema $\implies \aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_\omega$

Šta je ako prihvatimo CH ili GCH?

- **Teorema.** (Sirpinski) Ako važi CH, onda se ravan može rastaviti na dva dela, tako da je presek jednog dela sa svakom vertikalnom a drugog dela sa svakom horizontalnom pravom prebrojiv.
- **Teorema.** Ako se ravan može rastaviti na dva dela, tako da je presek jednog dela sa svakom vertikalnom a drugog dela sa svakom horizontalnom pravom prebrojiv, tada važi CH.
- **Teorema.** Neka važi GCH. Tada je za beskonačan kardinal κ
- $\kappa^\lambda = 1$, ako je $\lambda = 0$;
- $\kappa^\lambda = \kappa$, ako je $1 \leq \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$;
- $\kappa^\lambda = \kappa^\oplus$, ako je $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$;
- $\kappa^\lambda = \lambda^\oplus$, ako je $\kappa < \lambda$.