

## Ordinalni tip dobro uređenog skupa

U ovom delu ćemo dokazati glavnu teoremu o (striktno) dobro uređenim skupovima. Dokazaćemo, naime, da su ordinali pravi predstavnici svih mogućih tipova (striktno) dobro uređenih skupova. Radi lakšeg pisanja, u ovom delu ćemo uvesti jednostavnije oznaku za početne segmente ordinala: recimo umesto  $pred_\alpha(\gamma)$  pisaćemo samo  $[\gamma]$ .

**Lema 1.** *Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  ordinali. Tada*

$$\langle \alpha, <_\alpha \rangle \cong \langle \beta, <_\beta \rangle \Rightarrow \alpha = \beta.$$

**Dokaz.** Pretpostavimo suprotno, da  $\alpha \cong \beta$  i  $\alpha \neq \beta$ . Zbog trihotomije imamo  $\alpha \in \beta$ , ili  $\beta \in \alpha$ . Neka je  $\alpha \in \beta$ . Zbog tranzitivnosti skupa  $\alpha$  važi  $\alpha \subseteq \beta$ . No, ranije smo dokazali da ako je  $\alpha$  tranzitivan podskup od  $\beta$  i  $\alpha \neq \beta$  onda je  $\alpha$  početni segment od  $\beta$  tj.

$$\alpha = [\gamma] \cong \beta.$$

To daje kontradikciju, jer znamo da nijedan striktno dobro uređen skup ne može biti izomorfan svom početnom segmentu.

□

**Teorema 1. (O tipu striktno dobro uređenog skupa)** *Neka je  $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$  striktno dobro uređen skup. Tada postoji tačno jedan ordinal  $\alpha$  takav da je*

$$\mathcal{A} \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle.$$

**Dokaz.** Prema prethodnoj lemi, izomorfni ordinali su uvek jednaki, pa postoji najviše jedan takav ordinal. Neka je

$$A' = \{x \in A : (\exists \beta \in \mathbf{ON}) \langle [x], < \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle\}.$$

Tada je  $A' \neq \emptyset$ , jer za najmanji element  $m$  od  $\mathcal{A}$ ,  $[m] = \emptyset$ , i

$$\langle [m], < \rangle \cong \langle \emptyset, \in_\emptyset \rangle.$$

Dalje, za svaki  $x \in A'$ , postoji tačno jedan ordinal  $\beta$  takav da je  $[x] \cong \beta$  pa ćemo ga označiti sa  $\beta_x$ . Dalje, između  $[x]$  i  $\beta_x$  postoji tačno jedan

izomorfizam, označimo ga sa  $\varphi_x$ . Dakle,  $\varphi_x : [x) \rightarrow \beta_x$  je izomorfizam. Neka je

$$\alpha = \{\beta_x : x \in A'\}.$$

Zbog Aksiome zamene,  $\alpha$  je skup. Dokazaćemo da je  $\alpha$  baš traženi ordinal. Dokaz ćemo sprovesti u nekoliko koraka:

**Korak 1.** Neka je  $x \in A'$ . Tada za sve  $y < x$  važi da je

$$y \in A', \beta_y \in \beta_x \text{ i } \varphi_x(y) = \beta_y.$$

**Korak 2.**  $\alpha$  je ordinal.

**Korak 3.**  $\langle A', < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ .

**Korak 4.**  $A' = A$ .

Naravno, posle poslednjeg koraka imamo da je

$$\langle A, < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle.$$

**Korak 1.** Neka je  $x \in A'$ . Dokažimo da za sve  $y < x$  važi  $y \in A', \beta_y \in \beta_x$  i  $\varphi_x(y) = \beta_y$ . Kako je  $x \in A'$ , onda je  $\varphi_x : [x) \rightarrow \beta_x$  izomorfizam. Zbog  $y < x$  imamo  $y \in [x)$ , pa je  $\varphi_x(y) \in \beta_x$ . Označimo sa  $\gamma$  ordinal  $\varphi_x(y)$  i dokažimo da je  $[y) \cong \gamma$  tj. da je  $\gamma = \beta_y$  i  $y \in A'$ . Zaista, traženi izomorfizam je restrikcija preslikavanja  $\varphi_x$  na  $[y)$ . Naime:  $\varphi_{x|[y)}$  jeste "1-1" jer je restrikcija od  $\varphi_x$ .

- $\varphi_{x|[y)}$  jeste "na"  $\gamma$  jer

$$\varphi_{x|[y)}([y)) = \gamma.$$

- Kako je  $\varphi_{x|[y)}$  restrikcija monotnog preslikavanja, onda je i  $\varphi_{x|[y)}$  monotono.

**Korak 2.** Dokažimo da je  $\alpha$  ordinal. Videli smo da je (zbog Aksiome zamene i Aksiome podskupa)  $\alpha$  skup. Znamo da je tranzitivan skup ordinala opet ordinal, pa je dovoljno dokazati da je  $\alpha$  tranzitivan.

Neka je  $\gamma \in \beta_x \in \alpha$ . Treba dokazati da je  $\gamma \in \alpha$ . Znamo da je  $\varphi_x : [x) \rightarrow \beta_x$  izomorfizam. Kako je  $\varphi_x$  "na" i  $\gamma \in \beta_x$ , onda postoji  $y \in [x)$  takav da je  $\varphi_x(y) = \gamma$ . Dakle, postoji  $y < x$  takav da je  $\varphi_x(y) = \gamma$ . Zbog Koraka 1. imamo da je  $\varphi_x(y) = \beta_y \in \beta_x$  tj.  $\gamma \in \alpha$ .

**Korak 3.** Dokažimo  $\langle A', < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ . Definišimo preslikavanje  $\varphi : A' \rightarrow \alpha$  sa

$$\varphi(x) = \beta_x, \text{ za sve } x \in A'.$$

Tada se lako vidi da je  $\varphi$  dobro definisano, da je "na"  $\alpha$ , da je "1-1" i da je monotono.

**Korak 4.** Dokažimo  $A' = A$ . Pretpostavimo suprotno i neka je  $X = A \setminus A' \neq \emptyset$ . Tada  $X$  ima najmanji element  $x_0$ . Koristeći Korak 1, lako se dokazuje da je tada  $A' = [x_0)$ . No, u Koraku 3 smo dokazali da je  $\langle A', < \rangle \cong \langle \alpha, \in_A \rangle$  tj.

$$\langle [x_0), < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle,$$

iz čega će slediti, po definiciji skupa  $A'$ , da  $x_0 \in A'$ , što je kontradikcija. Tako,  $A = A'$  i

$$\langle A, < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle,$$

što je i trebalo dokazati.

□

**Definicija 1.** Za striktno dobro uređen skup  $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$  sa  $\text{type}(\mathcal{A})$  označimo jedinstven ordinal  $\alpha$  sa osobinom  $\mathcal{A} \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ . Ordinal  $\text{type}(\mathcal{A})$  zovemo **ordinalni tip** od  $\mathcal{A}$ .

Neka je  $\text{type}(\langle \mathcal{A}, < \rangle) = \alpha$ . Naravno, tada je  $\langle A, \leq \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ . Obratno, ako je  $\langle A, \leq \rangle$  dobro uređen skup i  $\langle A, \leq \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle$  onda je i  $\langle A, < \rangle \cong \langle \beta, \in_\beta \rangle$  pa je  $\text{type}(\langle A, < \rangle) = \beta$ . Tako, za svaki dobro uređen skup  $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$  postoji tačno jedan ordinal  $\alpha$  takav da je  $\langle A, \leq \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ . Pišemo po dogovoru  $\text{type}(\mathcal{A}) = \alpha$ .

**Teorema 2.** Za sve (striktno) dobro uređene skupove  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$  važi

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \quad \text{akko} \quad \text{type}(\mathcal{A}) = \text{type}(\mathcal{B}).$$

**Dokaz.** ( $\Rightarrow$ ) Neka je  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ . Kako je  $\mathcal{A} \cong \text{type}(\mathcal{A})$  i  $\mathcal{B} \cong \text{type}(\mathcal{B})$  onda  $\text{type}(\mathcal{A}) \cong \text{type}(\mathcal{B})$ . No, izomorfni ordinali su jednaki (L1.), pa  $\text{type}(\mathcal{A}) = \text{type}(\mathcal{B})$ .

( $\Leftarrow$ ) Iz  $\mathcal{A} \cong \text{type}(\mathcal{A}) = \text{type}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{B}$  dobijamo  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

□

Primetimo da kao neposrednu posledicu ove teoreme imamo da se svaki (striktno) dobro uređen skup  $\langle A, < \rangle$  može "indeksirati" po nekom ordinalu  $\alpha$ . Naime, ako je  $\alpha$  ordinal takav da je  $\langle A, < \rangle \cong \langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ , onda je  $A = \{a_\beta : \beta < \alpha\}$ , gde je  $a_\beta \neq a_\delta$  za sve  $\beta \neq \delta$ . Jednostavno, ako je  $\varphi : A \rightarrow \alpha$  izomorfizam između  $\langle A, < \rangle$  i  $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ , treba uzeti  $a_\beta = \varphi^{-1}(\beta)$ , za sve  $\beta < \alpha$ . Ako još prihvatimo AC, dobijamo da se svaki skup može indeksirati po nekom ordinalu  $\alpha$ .