Zasnivanje prirodnih brojeva

U ovom delu ćemo prirodne brojeve definisati kao specijalne ordinale. Intuitivno, ordinal α će biti prirodan broj akko se α može dobiti od $\emptyset$ konačnom primenom operacije $^+$. Dokazaćemo da je kolekcija svih prirodnih brojeva skup i da zadovoljava sve Peanove aksiome. Ta činjenica može da posluži kao dokaz da naša formalna definicija prirodnog broja pokriva intuitivan pojam prirodnog broja. Na kraju ćemo dokazati da je skup prirodnih brojeva najmanji granični ordinal.

Definicija 1. *Za ordinal α kažemo da je* **prirodan broj** *ako*

$$(\forall \beta \leq \alpha)(\beta = \emptyset \quad \vee \quad \beta \quad \textit{je naredni ordinal}).$$

Na primer, ordinali $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ su prirodni brojevi.

Teorema 1. *Elementi prirodnog broja su opet prirodni brojevi.*

Dokaz. Neka je α prirodan broj i $\beta \in \alpha$. Treba dokazati

$$(\forall \gamma \leq \beta)(\gamma = \emptyset \quad \vee \quad \gamma \quad \text{je naredni ordinal}).$$

Kako imamo $\gamma \leq \beta < \alpha$, sledi $\gamma < \alpha$, što daje da je $\gamma = \emptyset$ ili da je γ naredni ordinal.
$\square$

Teorema 2. *Ako je α prirodan broj, onda je i $\alpha \cup \{\alpha\}$ prirodan broj.*

Dokaz. Neka je $\beta \leq \alpha \cup \{\alpha\}$. Ako je $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$, onda je β naredni ordinal. Ako je $\beta < \alpha \cup \{\alpha\}$ onda je $\beta \in \alpha$ ili $\beta = \alpha$, iz čega sledi $\beta \leq \alpha$. No, kako je α prirodan broj, onda je $\beta = \emptyset$ ili je β naredni ordinal.
$\square$

Uvedimo redom sledeće oznake:

$0 = \emptyset, \quad 1 = 0^+ = \{0\}, \quad 2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\},$

$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \ldots, n + 1 = n^+ = n \cup \{n\} = \{0, 1, ..., n\}, \ldots$

Prema T1, svi ti ordinali su prirodni brojevi.

Definicija 2. *Za skup A kažemo da je* **induktivan** *ako $\emptyset \in A$ i za sve $x \in A$ važi $x \cup \{x\} \in A$.*

Prema tome, Aksioma beskonačnosti tvrdi da postoji bar jedan induktivan skup.

Teorema 3. *Neka je I proizvoljan induktivan skup. Svi prirodni brojevi pripadaju skupu I.*

Dokaz. Znamo da svaka neprazna klasa ordinala ima najmanji element. Pretpostavimo da je

$$K = \{\alpha : \alpha \text{ je prirodan broj i } \alpha \notin I\} \neq \emptyset,$$

i neka je α_0 najmanji ordinal u K. Jasno, $\alpha_0 \neq \emptyset$. Dakle, α_0 je naredni ordinal. Neka je $\alpha_0 = \beta \cup \{\beta\}$. Onda je $\beta \in \alpha_0$ takođe prirodan broj i $\beta < \alpha_0$, pa mora $\beta \in I$. Iz toga sledi $\beta^+ \in I$ što daje $\alpha_0 \in I$, kontradikcija. □

Teorema 4. *Klasa svih prirodnih brojeva jeste skup.*

Dokaz. Zbog Aksiome podskupa znamo da je

$$\{\alpha \in I : \ \alpha \text{ je prirodan broj } \}$$

sigurno skup, za bilo koji induktivan skup I. No, prema Teoremi 3, to je tačno skup **svih** prirodnih brojeva.
□

Definicija 3. *Sa ω ćemo obeležavati* **skup svih prirodnih brojeva.**

Teorema 5. *Skup ω zadovoljava sve Peanove aksiome, tj.*

1. $\emptyset \in \omega$
2. $n \in \omega \Rightarrow n^+ \in \omega$
3. $n \neq m \Rightarrow n^+ \neq m^+$

4. $(\forall X \subseteq \omega)((\emptyset \in X \land (\forall n \in X) n^+ \in X) \Rightarrow X = \omega)$.

Dokaz.

(1) i (2) su evidentni.

(3) Neka je $n \neq m$. Ako bi bilo $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$, dobili bi

$$(n \in m \quad \lor \quad n = m) \land (m \in n \quad \lor \quad m = n).$$

Zbog $n \neq m$ dobijamo $n \in m$ i $m \in n$ tj. $n \in n$, što je kontradikcija.

(4) Pretpostavimo suprotno, da je $\omega \setminus X \neq \emptyset$. Kako je to neprazan skup ordinala, ima najmanji. Označimo ga sa n_0. Onda je $n_0 \neq \emptyset$, pa je $n_0 = m \cup \{m\}$, za neki $m \in \omega$. Odatle sledi $m \in n_0$ tj. $m < n_0$ pa mora $m \in X$. No, tada bi $m^+ \in X$, što je kontradikcija.
□

Teorema 6. *ω je najmanji granični ordinal.*

Dokaz. Znamo da je svaki tranzitivan skup ordinala ponovo ordinal. Kako iz $\alpha \in \beta \in \omega$ sledi $\alpha \in \omega$, dobijamo da je ω tranzitivan, pa je ω ordinal.

Pretpostavimo da je ω naredni ordinal tj. $\omega = \alpha \cup \{\alpha\}$ za neki α. Tada je $\alpha \in \omega$ pa i $\alpha^+ \in \omega$, što daje $\omega \in \omega$ kontradikcija. Dakle, ω je granični ordinal. Na kraju, ω je najmanji granični ordinal, jer svaki $\alpha < \omega$ jeste prirodan broj, pa je ili $\alpha = \emptyset$ ili je α naredni ordinal.
□