

Ordinali

Pojam ordinala uveo je G. Cantor u jednom svom radu iz 1883. godine, kao tip uređenja dobro uređenih skupova. Pristup ordinalima sličan onom koji ćemo mi koristiti, prvi put je primenio von Neumann 1923. godine. Prema ovom pristupu, ordinali su specijalni skupovi koji mogu služiti kao istaknuti predstavnici klase svih mogućih dobro uređenih skupova.

Definicija 1. Za skup A kažemo da je **tranzitivan** ako za sve $x \in A$ važi $x \subseteq A$.

Na primer skupovi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$ su tranzitivni.

Neka je A neki skup. Definišimo relaciju \in_A skupa A na sledeći način:

$$\in_A = \{\langle x, y \rangle \in A \times A : x \in y\}.$$

Neka je $x \in_A y$ akko $x \in_A y$ ili $x = y$.

Definicija 2. Za skup A kažemo da je **ordinal** ako je tranzitivan i relacija \in_A jeste striktno dobro uređenje na A .

Naravno, ako je A ordinal, onda je \in_A dobro uređenje na A . Na primer, sledeći skupovi su ordinali: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

Primetimo da svi ovi navedeni ordinali (sem \emptyset) imaju "istvu strukturu" tj. svi oni su oblika $\beta \cup \{\beta\}$, za neki ordinal β .

Definicija 3 Za ordinal α kažemo da je **naredni** ako za neki ordinal β

$$\alpha = \beta \cup \{\beta\}.$$

U tom slučaju pišemo i $\alpha = \beta^+$ ili $\alpha = \beta + 1$. Ako $\alpha \neq \emptyset$ i α nije naredni, kažemo da je α **granični ordinal**.

Teorema 1. Presek dva ordinala je ordinal.

Teorema 2. Svaki element ordinala je ordinal.

Teorema 3. *Neka je α neki ordinal i $B \subseteq \alpha, B \neq \alpha$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

- (i) B je početni segment od $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$,
- (ii) B je tranzitivan skup.

Teorema 4. *Neka je B tranzitivan podskup ordinala α . Tada je*

$$B \in \alpha \text{ ili } B = \alpha.$$

Teorema 5. *Svaki tranzitivan podskup ordinala α jeste i sam ordinal.*

Po definiciji ordinala, osobina "biti ordinal" je osobina prvog reda u ZF teoriji skupova, tj. postoji formula prvog reda, koja znači: " α je ordinal". Po dogovoru, neka je

$$\alpha \in \mathbf{ON}$$

skraćeni zapis te formule. Intuitivno, \mathbf{ON} jeste, u stvari, oznaka za klasu svih ordinala. Čitalac koji želi da ostane strogo u okviru ZF teorije skupova (u kome klase ne postoje), može svuda gde naiđe na oznaku \mathbf{ON} da je zameni sa odgovarajućom formulom prvog reda. Na primer, oznaka

$$A \subseteq \mathbf{ON}$$

znači, u stvari

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \text{ je ordinal}),$$

Po dogovoru, u daljem ćemo za ordinale α i β umesto $\alpha \in \beta$ pisati $\alpha < \beta$. Intuitivno, to možemo shvatiti kao da smo u klasi \mathbf{ON} definisali "relaciju" $<$ na sledeći način:

$$\alpha < \beta \quad \text{akko} \quad \alpha \in \beta.$$

No, $<$ nije u strogom smislu relacija. Naime, binarne relacije smo definisali kao podskupove skupova oblika $A \times A$, a kasnije ćemo videti da klasa \mathbf{ON} nije skup. Ipak, korišćemo reč "relacija", da bi pomogli našoj intuiciji. Prirodno, pisaćemo:

$$\alpha \leq \beta \text{ akko } \alpha < \beta \text{ ili } \alpha = \beta.$$

Teorema 6. Na klasi **ON** relacija $<$ ima sve osobine striktnog dobrog uređenja, tj. za sve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{ON}$ važi

$$(i) \neg \alpha < \alpha;$$

$$(ii) (\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma;$$

(iii) Važi tačno jedna od sledećih relacija:

$$\alpha < \beta \text{ ili } \alpha = \beta \text{ ili } \beta < \alpha;$$

(iv) Svaka neprazna klasa ordinala ima minimalni element u odnosu na $<$. Drugim rečima, neka je ϕ neka osobina koja je definisana za sve ordinale, takva da bar jedan ordinal ima osobinu ϕ ; tada postoji ordinal β sa osobinom ϕ takav da ne postoji nijedan ordinal γ sa osobinom ϕ za koji bi važilo $\gamma < \beta$.

Dokaz.

(i) Pretpostavimo suprotno tj. $\alpha \in \alpha$. Tada bi bilo $\alpha \in_{\alpha} \alpha$, što je nemoguće jer je relacija \in_{α} irefleksivna.

(ii) Ako je $\alpha \in \beta \in \gamma$, onda zbog tranzitivnosti skupa γ sledi $\alpha \in \gamma$.

(iii) Primetimo da zbog (i) i (ii) ne mogu važiti dve relacije istovremeno. Pretpostavimo sada da je $\alpha \neq \beta$ i dokažimo da $\alpha \in \beta$ ili $\beta \in \alpha$. Znamo da je skup $\alpha \cap \beta$ ordinal pa je on tranzitivan podskup ordinala α i β . Prema jednoj od prethodnih teorema sledi

$$(\alpha \cap \beta \in \alpha \vee \alpha \cap \beta = \alpha) \wedge (\alpha \cap \beta \in \beta \vee \alpha \cap \beta = \beta).$$

To znači da imamo ukupno 4 mogućnosti. Lako se vidi da se ne može desiti

$$\alpha \cap \beta = \alpha \quad \text{i} \quad \alpha \cap \beta = \beta$$

niti

$$\alpha \cap \beta \in \alpha \quad \text{i} \quad \alpha \cap \beta \in \beta.$$

Ostaje

$$\alpha \cap \beta \in \alpha \quad \text{i} \quad \alpha \cap \beta = \beta$$

ili

$$\alpha \cap \beta = \alpha \quad \text{i} \quad \alpha \cap \beta \in \beta,$$

što redom daje $\beta \in \alpha$ odnosno $\alpha \in \beta$.

(iv) Neka ordinal α ima osobinu ϕ (što zapisujemo sa $\phi(\alpha)$). Posmatrajmo skup

$$A = \{x \in \alpha : \phi(x)\}.$$

(Skup A je dobro definisan, jer su svi elementi od α ponovo ordinali i osobina ϕ je definisana za sve $x \in \alpha$.) Ako je $A = \emptyset$, onda je α traženi minimalni ordinal sa osobinom ϕ . Neka je $A \neq \emptyset$. Kako je $A \subseteq \alpha$, a uređen skup $\langle \alpha, \in_\alpha \rangle$ ima osobinu minimalnosti, onda A ima minimalni element u odnosu na \in_α . Lako je videti da je (zbog (iii)) taj minimalni element jedinstven. Označimo ga sa β i dokažimo da je upravo β traženi ordinal. Zaista, β ima osobinu ϕ (i jeste ordinal jer $\beta \in \alpha$); dalje, ako je γ ordinal sa osobinom ϕ takav da $\gamma < \beta$ onda bi imali

$$\gamma \in \beta \in \alpha \Rightarrow \gamma \in \alpha,$$

pa bi $\gamma \in A$, što je kontradikcija.

□

Primetimo da u prethodnoj teoremi u (iv) možemo iskazati i jače tvrđenje. Naime: Svaka neprazna klasa ordinala ima najmanji element u odnosu na relaciju \leq .

Teorema 7. *Tranzitivan skup ordinala je ordinal.*

Dokaz. Neka je A tranzitivan skup ordinala. Da bi A bio ordinal, relacija \in_A treba da je striktno dobro uređenje na A , a to sledi iz prethodne teoreme.

□

Teorema 8. *Klasa ON nije skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je **ON** skup. Kako je element ordinala ponovo ordinal onda imamo

$$\alpha \in \beta \in \mathbf{ON} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{ON},$$

tj. **ON** je tranzitivan skup ordinala. Prema prethodnoj teoremi, **ON** je ordinal, pa mora

$$\mathbf{ON} \in \mathbf{ON},$$

što je nemoguće, jer nijedan ordinal nije sam sebi element. Dakle, **ON** nije skup.

□

Da je \mathbf{ON} skup, mogli bi reći da $\langle \mathbf{ON}, \leq \rangle$ zadovoljava uslov minimalnosti, pa bi u njemu važio i uslov induktivnosti, koji omogućava sprovođenje dokaza unutar \mathbf{ON} koristeći indukciju analognu matematičkoj indukciji u skupu prirodnih brojeva. No, \mathbf{ON} je prava klasa. Ipak, i u klasi \mathbf{ON} svih ordinala možemo koristiti princip koji je analogan principu matematičke indukcije. To je tzv. **princip transfinitne indukcije**. On se zasniva na sledećoj teoremi.

Teorema 9. *Neka je ϕ neka osobina koja je definisana za sve ordinale. Pretpostavimo da za svaki ordinal α važi:*

(*) *Ako svi ordinali $\beta < \alpha$ imaju osobinu ϕ , onda i α ima osobinu ϕ .*

Tada osobinu ϕ imaju svi ordinali.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da je klasa

$$A = \{\gamma \in \mathbf{ON} : \neg\phi(\gamma)\}$$

neprazna i neka je γ_0 (jedinstven) minimalni element u A . Tada za sve $\beta < \gamma_0$ važi da imaju osobinu ϕ , što zbog uslova (*) povlači $\phi(\gamma_0)$, kontradikcija. Dakle, $A = \emptyset$ tj. za sve $\alpha \in \mathbf{ON}$ važi $\phi(\alpha)$.

□