

Konačni kardinali

Definicija 1 Za skup A kažemo da je **konačan** ako je ekvipotentan sa nekim prirodnim brojem tj.

$$(\exists n \in \omega) \quad n \approx A.$$

U suprotnom, A je **beskonačan**.

U ovom delu ćemo dokazati da su konačni kardinali tačno prirodni brojevi. Naravno, svi prirodni brojevi su konačni ordinali. Da dokažemo da su svi prirodni brojevi i *kardinali*, potrebna nam je sledeća lema.

Lema 1. *Nijedan prirodan broj nije ekvipotentan svom pravom podskupu.*

Dokaz. Neka je $A = \{n \in \omega : (\forall f : n \xrightarrow{1-1} n) \text{ rang}(f) = n\}$. Potrebno i dovoljno je dokazati da je $A = \omega$. Da bi to dokazali, dovoljno je uveriti se da je A induktivan.

(i) $\emptyset \in A$, trivijalno.

(ii) Pretpostavimo da je $n \in A$, dokažimo da je $n^+ \in A$. Neka je $f : n^+ \xrightarrow{1-1} n^+$. Treba dokazati da je $\text{rang}(f) = n^+$. Posmatrajmo funkciju

$$f|_n : n \xrightarrow{1-1} n^+.$$

Imamo dva slučaja:

• **I slučaj:** $\text{rang}(f|_n) \subseteq n$. Tada je jasno $f|_n : n \xrightarrow{1-1} n$, pa je $\text{rang}(f|_n) = n$. Prema tome, mora $f(n) = n$, i $\text{rang}(f) = n \cup \{n\} = n^+$.

• **II slučaj:** $\text{rang}(f|_n) \not\subseteq n$. Tada postoji $k \in n$ takav da je $f(k) = n$ i $f(n) = r \in n$. Definišimo novu funkciju $g : n \cup \{n\} \rightarrow n \cup \{n\}$ na sledeći način:

$$g(n) = n$$

$$g(k) = r$$

$$g(\ell) = f(\ell), \text{ za sve } \ell \neq n, k.$$

Jasno, $\text{rang}(f) = \text{rang}(g)$. S druge strane, $\text{rang}(g|_n) \subseteq n$, pa imamo da $g|_n : n \xrightarrow{1-1} n$. Zbog indukcijske hipoteze (tj. $n \in A$) dobijamo da $\text{rang}(g|_n) = n$, pa je

$$\text{rang}(g) = n \cup \{n\} = n^+,$$

što zbog $\text{rang}(g) = \text{rang}(f)$ daje $\text{rang}(f) = n^+$.

□

Teorema 1. *Svi prirodni brojevi su kardinali.*

Dokaz. Neka je $n \in \omega$. Treba dokazati da za sve $k < n, k \not\approx n$. No, $k < n$ znači $k \in n$ tj. $k \subset n$, pa prema prethodnoj lemi dobijamo $k \not\approx n$.

Lema 2. *Nijedan konačan skup nije ekvipotentan svom pravom podskupu.*

Dokaz. Neka je A konačan skup, i neka je $A \approx n$. Neka je $B \subset A$. Pretpostavimo suprotno, neka je $f : A \xrightarrow{1-1}_{na} B$. Ako sa g označimo bijekciju koja preslikava n na A onda imamo da $g^{-1} \circ f \circ g : n \xrightarrow{1-1}_{na} g^{-1}(B)$. No, $g^{-1}(B) \subset n$, što je kontradikcija sa Lemom 1.

$$n \xrightarrow{1-1}_{na} A$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c} 1-1 \\ na \end{array} \left| \begin{array}{c} f \\ \downarrow \end{array} \right. \end{array}$$

$$n \subset f^{-1}(B) \xrightarrow{1-1}_{g^{-1}} B \subset A$$

□

Teorema 2. *Svi konačni ordinali su prirodni brojevi tj.*

$$(\forall \alpha \in \mathbf{ON})(\forall n \in \omega)(\alpha \approx n \Rightarrow \alpha = n).$$

Dokaz. Neka je $\alpha \approx n$, i pretpostavimo da je $\alpha \neq n$. Kako su i α i n ordinali, onda mora $\alpha < n$ ili $n < \alpha$. Ako bi bilo $\alpha < n$ onda $\alpha \subset n$, što je kontradikcija sa Lemom. Ako bi bilo $n < \alpha$ onda $n \subset \alpha$, a to je kontradikcija sa Lemom 2.

□

Naravno, kako su svi prirodni brojevi kardinali, dobijamo da su konačni kardinali tačno prirodni brojevi.