Kardinali kao specijalni ordinali

Kao što smo ranije dokazali, prema Teoremi o tipu striktno dobro uređenog skupa, za svaki striktno dobro uređen skup $(A, <)$ postoji ordinal α koji je izomorfan sa $(A, <)$. Dakle, klasa ordinala α takvih da je $A \approx \alpha$ je sigurno neprazna. S druge strane, svaka neprazna klasa ordinala ima najmanji element. Te dve činjenice nam omogućavaju da, u slučaju da se skup A može dobro urediti, **kardinalnost skupa** A, (u oznaci $|A|$), definišemo na sledeći način:

Definicija 1 *Neka se skup A može dobro urediti.* **Kardinalnost skupa** A, *(u oznaci $|A|$) jeste najmanji ordinal α takav da je $\alpha \approx A$.*

Ako prihvatimo Aksiomu izbora, onda se svaki skup može dobro urediti, pa je kardinalnost $|A|$ definisana za svaki skup A. Primetimo da u slučaju ordinala, AC nije potrebna: svaki ordinal α ima svoju kardinalnost $|\alpha|$. Prema tome, pojam **kardinala** možemo definisati korektno i bez pozivanja na AC. Naime:

Definicija 2 *Za ordinal α kažemo da je* **kardinal** *ako je*

$$\alpha = |\alpha|.$$

Naravno, za svaki skup $A, |A|$ jeste kardinal. Naime, ako bi postojao ordinal $\beta < |A|$ takav da je $\beta \approx |A|$, onda zbog $|A| \approx A$ bi dobili $\beta \approx A$, što je suprotno sa definicijom $|A|$.

Sledeća teorema je, u stvari, samo preformulacija definicije kardinala, ali će se u daljem radu pokazati kao korisna.

Teorema 1. *Ordinal α je kardinal akko $(\forall \beta < \alpha)\beta \not\approx \alpha$.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Neka je $|\alpha| = \alpha$. To znači da je α najmanji ordinal ekvipotentan sa α.
($\Leftarrow$) kako je $\alpha \approx \alpha$ onda uslov $(\forall \beta < \alpha)\beta \not\approx \alpha$ znači po definiciji da je $|\alpha| = \alpha$.
$\square$

U sledeće dve teoreme ćemo pokazati kakav je odnos između ekvipotencije, relacije $\preceq$ i kardinalnosti. Po dogovoru ćemo, kad god se u daljem tekstu pojavi oznaka $|A|$, podrazumevati da se dotični skup A može dobro urediti.

Teorema 2. *Za sve skupove A, B važi*

$$A \approx B \iff |A| = |B|.$$

Dokaz.
($\Rightarrow$) Neka je $A \approx B$. Tada zbog $A \approx |A|$ i $B \approx |B|$ zaključujemo $A \approx |B|$ i $B \approx |A|$. Po definiciji kardinalnosti skupova sada sledi $|A| \leq |B|$ odnosno $|B| \leq |A|$. No, kako je relacija $\leq$ (definisana na klasi svih ordinala) antisimetrična, sledi $|A| = |B|$.
($\Leftarrow$) Neka je $|A| = |B|$. Onda $A \approx |A| = |B| \approx B$, pa je $A \approx B$.
$\square$

Teorema 3. *Za sve skupove A i B važi:*

$$|A| \leq |B| \iff A \preceq B.$$

Dokaz.
($\Rightarrow$) Neka je $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ i $\alpha \leq \beta$. Tada je $\alpha \subseteq \beta$, pa postoji potapanje $i : \alpha \to \beta$ ($i(\gamma) = \gamma$, za sve $\gamma \in \alpha$). Označimo sa f bijekciju iz A u α, a sa g bijekciju iz B u β. Tada je $h = g^{-1} \circ i \circ f : A \to B$ injekcija, pa je $A \preceq B$.
($\Leftarrow$) Neka je $|A| = \alpha, |B| = \beta$ i $A \preceq B$. Označimo sa h injekciju iz A u B. Pretpostavimo da nije $\alpha \leq \beta$. Tada je $\beta < \alpha$ tj. $\beta \subset \alpha$. Neka je $i : \beta \to \alpha$ identično potapanje β i α. Neka su $f : A \to \alpha$ i $g : B \to \beta$ bijekcije, i posmatrajmo funkciju $\varphi = f^{-1} \circ i \circ g$. Tada $\varphi : B \to A$ jeste injekcija. Prema Teoremi Schröder-Bernstein sada iz $A \preceq B$ i $B \preceq A$ zaključujemo $A \approx B$ što prema prethodnoj teoremi implicira $|A| = |B|$ tj. $\alpha = \beta$, kontradikcija.
$\square$

Prema tome, ako su α i β kardinali, onda

$$\alpha \approx \beta \text{ akko } \alpha = \beta,$$

i

$$\alpha \preceq \beta \text{ akko } \alpha \leq \beta.$$