Ekvipotentni skupovi

Pre nego što pređemo na definiciju kardinala kao specijalnog ordinala, podsetimo se nekih činjenica, na koje se pomisli kada se pomene pojam kardinalnog broja. Naime, prvi i najpoznatiji pristup pojmu kardinalnog broja jeste preko tzv. ekvipotentih skupova, tj. skupova između kojih postoji bijekcija. Prema tom pristupu, svaka **klasa** ekvipotentnih skupova jeste **kardinalni broj** (koji odgovara tim skupovima). No, kako mi želimo da ostanemo (koliko god je to moguće) u okviru ZF teorije skupova, usvojićemo pristup po kome su svi objekti sa kojima radimo (pa dakle i kardinali) **skupovi**. Prema tom pristupu kardinali će biti neki specijani ordinali; dalje, pod uslovom da usvojimo Aksiomu izbora, svakom skupu na jednoznačan način odgovara neki kardinalni broj, i dva skupa će imati isti kardinalni broj ako i samo ako su oni ekvipotentni. Prema tome, sve činjenice koje smo ranije (tokom školovanja) dokazivali za ekvipotentne skupove možemo iskoristiti i u ovom pristupu.

Definicija 1 *Za skupove A i B kažemo da su* **ekvipotentni***, (u oznaci $A \approx B$), ako postoji bijekcija iz A na B. Za skupove A i B koji nisu ekvipotentni pišemo $A \not\approx B$. Pisaćemo $A \preceq B$ ako postoji injekcija iz A u B, dok ćemo oznaku $A \prec B$ koristiti u slučaju da je $A \preceq B$ i nije $B \preceq A$.*

U sledećoj teoremi su sadržane neke jednostavne osobine koje se odnose na upravo definisane pojmove.

Teorema 1. *Neka su A, B, C proizvoljni skupovi. Tada:*

1) $A \preceq B$ i $B \preceq C$ onda $A \preceq C$.

2) a) $A \approx A$,

b) $A \approx B$ onda $B \approx A$,

c) $A \approx B$ i $B \approx C$ onda $A \approx C$.

Dokaz. Direktno po definiciji, koristeći osobine injekcija odnosno bijekcija. $\square$

Teorema 2. (Cantor, 1892.) *Za svaki skup X, $X \prec \mathcal{P}(X)$.*

Dokaz. Jasno, postoji injekcija iz X u $\mathcal{P}(X)$. Treba dokazati da ne postoji injekcija iz $\mathcal{P}(X)$ u X. Pretpostavimo suprotno i neka je $f : \mathcal{P}(X) \to X$ neka injekcija. Tada je skup

$$A = \{f(S) : S \subseteq X, f(S) \notin S\}$$

dobro definisan. No, tada bi dobili da

$$f(A) \in A \Leftrightarrow f(A) \notin A,$$

što je kontradikcija. Prema tome, ne postoji injekcija iz $\mathcal{P}(X)$ u X, što smo i trebali dokazati.
□

Teorema 3. *Za svaki skup* $A, \mathcal{P}(A) \approx \{0,1\}^A$.

Dokaz. Traženu bijekciju $f : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$ definišimo na sledeći način: za sve $B \subseteq A$,

$$f(B) = \chi_B,$$

gde je $\chi_B \in \{0,1\}^A$ karakteristična funkcija skupa B u A, tj.

$$\chi_B(x) = 1 \text{ akko } x \in B.$$

□

Teorema 4. (Schröder - Bernstein, 1897.)
Za sve skupove A *i* B *važi: ako* $A \preceq B$ *i* $B \preceq A$ *onda* $A \approx B$.