

Beskonačni kardinali, alefi, CH

Teorema 1. ω je najmanji beskonačan kardinal.

Dokaz. Da je ω beskonačan skup sledi iz činjenice da je ekvipotentan svom pravom podskupu (na primer, $f : n \mapsto n^+$ je bijekcija između ω i $\omega \setminus \{\emptyset\}$), a znamo (L2) da nijedan konačan skup nije ekvipotentan svom pravom podskupu. Naravno, ω je i kardinal, jer za sve $\beta < \omega$ važi $\beta \not\approx \omega$. (Naime $\beta < \omega$ znači $\beta \in \omega$ tj. β je prirodan broj pa ω ne može biti ekvipotentan prirodnom broju jer je beskonačan.) I na kraju, ω je najmanji beskonačan kardinal, jer svi ordinali $\beta < \omega$ su prirodni brojevi, a oni su konačni.

□

Znamo da je ω granični ordinal. To možemo dokazati za sve beskonačne kardinale.

Lema 1. Za svaki ordinal $\beta \geq \omega$ važi

$$|\beta| = |\beta^+|.$$

Dokaz. Definišemo funkciju $\varphi : \beta^+ \rightarrow \beta$ na sledeći način

$$\varphi(\beta) = \emptyset$$

$$\varphi(\gamma) = \gamma \cup \{\gamma\}, \text{ za } \gamma < \omega$$

$$\varphi(\gamma) = \gamma, \text{ za } \omega \leq \gamma < \beta$$

Nije teško proveriti da je φ bijekcija.

□

Teorema 2. Svaki beskonačan kardinal je granični ordinal.

Dokaz. Neka je κ neki beskonačan kardinal. Tada $\kappa \geq \omega$. Pretpostavimo da je $\kappa = \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$, za neki ordinal α . Onda je $\alpha \geq \omega$ (jer bi inače bilo $\alpha \in \omega$ i $\alpha^+ \in \omega$ tj. $\kappa < \omega$). No, ako $\omega \subseteq \alpha$, onda je lako napraviti bijekciju između α i $\alpha \cup \{\alpha\}$, pa bi bilo $\alpha \approx \alpha \cup \{\alpha\} = \kappa$. To bi značilo $\alpha \approx \kappa$ i $\alpha < \kappa$, što je kontradikcija sa činjenicom da je κ kardinal.

□

Imajući u vidu Cantorovu teoremu, odmah dobijamo:

Teorema 3. *Za svaki kardinal λ , postoji kardinal κ , takav da je $\kappa > \lambda$.*

Teorema 4. *Klasa svih kardinala nije skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{\lambda : \lambda \text{ je kardinal}\}$ skup. Kako je unija proizvoljnog skupa kardinala ponovo kardinal, onda je $\cup\{\lambda : \lambda \text{ je kardinal}\} = \alpha$ kardinal. Prema prethodnom tvrđenju, postoji kardinal $\kappa > \alpha$. No, α je supremum skupa $\{\lambda : \lambda \text{ je kardinal}\}$, pa bi bilo $\kappa \leq \alpha$, što je kontradikcija. \square

Primetimo da sada možemo zaključiti da ni klasa svih beskonačnih kardinala $Card_\infty$ nije skup. Naime, klasa konačnih kardinala ω jeste skup, pa ako bi i $Card_\infty$ bio skup, dobili bi da je klasa svih kardinala skup.

Alefi

Kratko rečeno, cilj ovog dela je da se pokaže da se beskonačni kardinali mogu "poređati u niz"

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\alpha, \dots \quad (\alpha \in \mathbf{ON}),$$

tako da za $\alpha < \beta$ važi $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$, $\aleph_{\alpha+1}$ jeste najmanji kardinal veći od \aleph_α , a za granični ordinal α ,

$$\aleph_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta.$$

Neka je $F(x, y)$ formula prvog reda na jeziku $\{\in\}$. Neka je dalje K neka klasa ordinala pri čemu važi

$$(\forall \alpha \in K)(\exists \beta \in \mathbf{ON})F(\alpha, \beta).$$

Kažemo da je F **funktionalna relacija** na K ako je

$$(\forall \alpha \in K)(\exists! \beta \in \mathbf{ON})F(\alpha, \beta).$$

U tom slučaju ćemo pisati $F(\alpha) = \beta$ i $F : K \rightarrow \mathbf{ON}$. Prirodno, za F ćemo reći da je "1-1" ako za sve $\alpha, \beta \in K$ važi

$$F(\alpha) = F(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta,$$

da je "na" ako

$$(\forall \beta \in \mathbf{ON})(\exists \alpha \in K)F(\alpha) = \beta,$$

i da je monotona ako za sve $\alpha, \beta \in K$ važi

$$\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) < F(\beta).$$

Neka je K klasa ordinala. Kažemo da je $\langle K, < \rangle$ **izomorfno** sa $\langle \mathbf{ON}, < \rangle$ ako postoji funkcionalna relacija $F : K \rightarrow \mathbf{ON}$ koja je "1-1", "na" i monotona. Primetimo da u tom slučaju imamo za sve $\alpha, \beta \in K$

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow F(\alpha) < F(\beta).$$

Teorema 5. *Neka je $Card_\infty$ klasa svih beskonačnih kardinala. Tada su $\langle Card_\infty, < \rangle$ i $\langle \mathbf{ON}, < \rangle$ izomorfni.*

Dokaz. • Za sve $x \in Card_\infty$, sa S_x označimo početni segment u $Card_\infty$ određen sa x tj.

$$S_x = \{y \in Card_\infty : y < x\}.$$

Kako je $S_x \subseteq x$ i x je skup, sledi da je S_x skup za sve $x \in Card_\infty$. Jasno, $\langle S_x, < \rangle$ je striktno dobro uređen skup.

- Neka je $F(x, \alpha)$ formula prvog reda na jeziku $\{\in\}$ koja kaže:

$$"\alpha \text{ je ordinal izomorfan sa } \langle S_x, < \rangle".$$

Jasno, $F(x, \alpha)$ je funkcionalna relacija na $Card_\infty$. Dokažimo da je $F : Card_\infty \rightarrow \mathbf{ON}$ "1-1", "na" i da je monotona.

- F je "1-1". Zaista, ako je $F(x) = \alpha = F(y)$ onda je

$$S_x \cong \alpha \cong S_y \Rightarrow S_x \cong S_y,$$

pa ako bi, na primer, bilo $x < y$, onda bi S_x bio početni segment od S_y , a to je nemoguće, jer smo ranije dokazali (T) da nijedan striktno dobro uređen skup nije izomorfan svom početnom segmentu.

- F je monotona. Neka je $x < y$, treba dokazati $F(x) < F(y)$. Neka je $F(y) = \alpha$. Tada je $S_y \cong \alpha$. Neka je $\varphi : S_y \rightarrow \alpha$ taj izomorfizam. Kako je $x \in S_y$ onda $\varphi(x) \in \alpha$. Neka je $\beta = \varphi(x)$. Tada je $\varphi|_{S_x} : S_x \rightarrow \beta$ izomorfizam pa je $S_x \cong \beta$ tj. $\beta = F(x)$, pa zbog $\beta \in \alpha$ dobijamo $F(x) < F(y)$.

- Označimo sa A klasu $F(Card_\infty)$ tj.

$$A = \{\alpha \in \mathbf{ON} : (\exists x \in Card_\infty) F(x) = \alpha\}.$$

Nije teško videti da ako $\beta < \alpha$ i $\alpha \in A$ onda i $\beta \in A$.

• F je "na". Treba, u stvari, dokazati da je $A = \mathbf{ON}$. Pretpostavimo suprotno tj. $A \neq \mathbf{ON}$. Tada klasa ordinala $X = \mathbf{ON} \setminus A$ ima najmanji element α_0 . Tada se lako dokazuje da je $A = [\alpha_0)$. Zaista,

(\subseteq) Neka je $\alpha \in A$. Pretpostavimo da $\alpha \geq \alpha_0$. Za $\alpha = \alpha_0$ dobijamo $\alpha_0 \in A$, što je kontradikcija. Za $\alpha > \alpha_0$, zbog $\alpha \in A$ dobijamo ponovo $\alpha_0 \in A$, kontradikcija. Prema tome, mora $\alpha < \alpha_0$ tj. $\alpha \in [\alpha_0)$.

(\supseteq) Neka je $\alpha \in [\alpha_0)$ tj. $\alpha < \alpha_0$. Tada $\alpha \notin X$, jer je α_0 najmanji u X , pa prema tome $\alpha \in A$. Dakle, $A = [\alpha_0)$ pa je A skup. Kako je F "1-1", onda na osnovu Aksiome zamene zaključujemo i da je $F^{-1}(A) = \mathbf{Card}_\infty$ takođe skup, što je kontradikcija. Prema tome, $A = \mathbf{ON}$ i $F : \mathbf{Card}_\infty \rightarrow \mathbf{ON}$ je "na".

□

Neka je $F : \mathbf{Card}_\infty \rightarrow \mathbf{ON}$ izomorfizam između $\langle \mathbf{Card}_\infty, < \rangle$ i $\langle \mathbf{ON}, < \rangle$ definisan u prethodnoj teoremi. Za $\alpha \in \mathbf{ON}$, beskonačni kardinal $F^{-1}(\alpha)$ obeležavamo sa \aleph_α (alef-alfa). Prema tome, definisali smo niz beskonačnih kardinala

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\alpha, \dots, (\alpha \in \mathbf{ON}).$$

Naravno, \aleph_0 je najmanji beskonačan kardinal, tj. ω . Uobičajeno je da se taj niz kardinala, kada se posmatraju kao ordinali, obeležava sa

$$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_\alpha, \dots, (\alpha \in \mathbf{ON}).$$

Direktno iz prethodne teoreme dobijamo:

Teorema 6. (1) Za svaki beskonačan kardinal κ postoji ordinal α takav da je $\kappa = \aleph_\alpha$.

(2) Za sve ordinale α, β važi: ako $\alpha < \beta$ onda $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

Teorema 7.

(1) Za svaki $\alpha \in \mathbf{ON}$ kardinal $\aleph_{\alpha+1}$ je najmanji kardinal veći od \aleph_α .

(2) Ako je α granični ordinal, onda

$$\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta.$$

Dokaz. (1) Naravno, zbog $\alpha < \alpha + 1$ sledi $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$. Ako bi bilo $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ onda $\alpha < \beta$ pa $\alpha + 1 \leq \beta$, iz čega sledi $\aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta$.

(2) Znamo da je

$$\cup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Znači, treba dokazati da je

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Jasno, \aleph_α je gornje ograničenje od $\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$. Dokažimo da je \aleph_α najmanje gornje ograničenje. Neka je

$$\aleph_\beta \leq \delta, \text{ za sve } \beta < \alpha.$$

Tada je δ beskonačan kardinal, pa postoji $\gamma \in \mathbf{ON}$, takav da

$$\delta = \aleph_\gamma.$$

Treba dokazati da je $\aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma$. Pretpostavimo suprotno tj. $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$. Tada bi bilo $\gamma < \alpha$, pa kako je α granični ordinal, onda $\gamma + 1 < \alpha$ i

$$\aleph_{\gamma+1} < \aleph_\gamma,$$

jer je \aleph_γ gornje ograničenje za sve $\aleph_\beta, \beta < \alpha$. No, ovo je u kontradikciji sa (1).

□

Kontinuum hipoteza

Znamo da za svaki skup X važi

$$2^X \approx \mathcal{P}(X) \text{ i } |\mathcal{P}(X)| > |X|.$$

Prema tome, znamo da je

$$2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Kako je \aleph_1 najmanji kardinal veći od \aleph_0 , onda je

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}.$$

No, da li je $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$? Da li je 2^{\aleph_0} najmanji kardinal posle \aleph_0 ? Poznato je da je kardinalnost skupa realnih brojeva baš 2^{\aleph_0} , pa se (iz istorijskih razloga)

taj kardinalni broj zove i **kontinuum** i obeležava sa c . Prema tome, naše pitanje možemo formulisati i ovako: *Da li postoje beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi, a čija kardinalnost je manja od kontinuuma?* Problem koji pita *Koliko je 2^{\aleph_0} ?* zove se **Problem kontinuuma**. Tvđenje da je $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ zove se **Kontinuum hipoteza** (CH). Slično, za svaki ordinal α imamo da je

$$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$$

i da je $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$. **Uopšteni problem kontinuuma** pita *Koliko je 2^{\aleph_α} ?* Tvđenje da je $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ se zove **Uopštena kontinuum hipoteza** (GCH). Status Kontinuum hipoteze odnosno Uopšene kontinuum hipoteze je sličan statusu Aksiome izbora. Naime, u okvirima ZF se niti mogu dokazati, niti se mogu oboriti.

Teorema 8. (Gödel, 1939) *GCH je saglasna sa teorijom ZF, tj. ako je ZF neprotivrečna, onda je i ZF + GCH neprotivrečna.*

Teorema 9. (Cohen, 1963) *Ako je ZF neprotivrečna onda je i ZF + \neg CH neprotivrečna. Prema tome, CH je nezavisna od ZF teorije.*