

11 Mala teorema kompletnosti i odlučivost iskaznog računa

Cilj sledeće dve sekcije je da dokažemo *teoremu kompletnosti* za iskazni račun \mathcal{H} , koja tvrdi da za sve skupove formula Σ i sve formule A važi:

$$\Sigma \models A \text{ akko } \Sigma \vdash A.$$

Prvo ćemo dokazati specijalni slučaj ove teoreme, kada je skup hipoteza prazan (tzv. *Mala teorema kompletnosti*): Formula A je teorema iskaznog računa \mathcal{H} akko je A tautologija. Za dokaz Male teoreme kompletnosti potrebna nam je samo još jedna lema. Kao i ranije, ako je F neka formula, $a \in \{\top, \perp\}$, onda oznaka F^a znači F , ako je $a = \top$, odnosno $\neg F$ ako je $a = \perp$.

Lema 8 *Neka je $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ neka formula i neka su $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{\top, \perp\}$. Ako je $a = A(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tada važi*

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash A^a.$$

DOKAZ. Indukcijom po složenosti formule A .

1. Neka je $A = p_i$, gde je $1 \leq i \leq n$. Tada je jasno

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash p_i^{a_i}.$$

2. Pretpostavimo da tvrđenje važi za formule B i C i dokažimo da tada važi i za formule $\neg B$ i $B \Rightarrow C$.

- Slučaj $\neg B$. Neka je $b = B(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Po indukcijskoj pretpostavci imamo

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash B^b.$$

Ako je $a = \neg B(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onda znamo da je $a = \neg b$. U slučaju da je $b = \top$, po indukcijskoj hipotezi imamo

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash B,$$

odnosno

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash \neg \neg B,$$

a to je

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash (\neg B)^\perp,$$

što i jeste ono što treba dokazati, jer je $a = \perp$. Slično, ako je $b = \perp$, onda po indukcijskoj hipotezi imamo

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash \neg B,$$

a to je baš tvrđenje koje treba dokazati, jer je u tom slučaju $a = \top$.

- Slučaj $B \Rightarrow C$. Neka je $B = B(p_1, p_2, \dots, p_n)$ i $C = C(p_1, p_2, \dots, p_n)$, i neka je $b = B(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $c = C(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Tada po indukcijskoj hipotezi imamo da je

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash B^b,$$

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash C^c.$$

Ako je a vrednost formule $B \Rightarrow C$ u istoj valuaciji (tj. u valuaciji τ u kojoj je $\tau(p_i) = a_i$, za sve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$), onda je naravno $a = (b \Rightarrow c)$. U zavisnosti od konkretnih vrednosti b i c , imamo četiri slučaja:

- (a) $b = \top, c = \top$,
- (b) $b = \top, c = \perp$,
- (c) $b = \perp, c = \top$,
- (d) $b = \perp, c = \perp$.

No, zbog Leme 6, u sva četiri slučaja imamo da važi

$$B^b, C^c \vdash (B \Rightarrow C)^a,$$

pa prema tome

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash (B \Rightarrow C)^a.$$

Teorema 23 (Mala teorema kompletnosti) *Za svaku iskaznu formulu A*

$$\models A \text{ akko } \vdash A.$$

DOKAZ.

- Smer (\leftarrow). Neka je $\vdash A$ i neka je A_1, A_2, \dots, A_n dokazni niz za formulu A . Dokažimo da je A tautologija, indukcijom po dužini dokaza n .
 1. Neka je $n = 1$. Tada se dokazni niz sastoji od jedne jedine formule, A , što znači da je A neka aksioma. No, sve aksiome su tautologije, pa je $\models A$.
 2. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule čiji je dokazni niz kraći od n . Neka je sada $\vdash A$ i neka je odgovarajući dokazni niz A_1, A_2, \dots, A_n . Poslednja formula u tom nizu je formula A , i prema definiciji dokaznog niza, imamo dve mogućnosti: A je aksioma ili A sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu pravila Modus Ponens. U prvom slučaju A je tautologija. Neka je formula A dobijena pomoću pravila MP od formula A_i odnosno $A_i \Rightarrow A$. Kako su te dve formule ranije u dokaznom nizu, imaju dokaze čija je dužina manja od n , pa za njih važi indukcijska hipoteza. Prema tome,

$$\models A_i \text{ i } \models A_i \Rightarrow A.$$

No, tada je i formula A tautologija, što smo i trebali dokazati.

- Smer (\rightarrow). Neka je formula $A = A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tautologija. Zbog prethodne leme, za sve $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{\top, \perp\}$ važi:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash A,$$

jer je $a = A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uvek \top . Posmatrajmo sada slučajeve kada je $a_n = \top$ i kada je $a_n = \perp$:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n \vdash A,$$

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, \neg p_n \vdash A.$$

Primenimo sada Teoremu dedukcije na oba slučaja, dobijamo

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_{n-1}^{a_{n-1}} \vdash p_n \Rightarrow A,$$

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_{n-1}^{a_{n-1}} \vdash \neg p_n \Rightarrow A.$$

Pravilo SP nam daje $p_n \Rightarrow A, \neg p_n \Rightarrow A \vdash A$. Prema tome,

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_{n-1}^{a_{n-1}} \vdash A.$$

Ponovimo ovaj postupak još $n - 1$ puta. U poslednjem koraku ćemo imati

$$p_1 \vdash A \text{ i } \neg p_1 \vdash A,$$

i kada poslednji put primenimo Teoremu dedukcije i pravilo SP, dobijamo konačno $\vdash A$.

□

Posledica Male teoreme kompletnosti je *odlučivost iskaznog računa*:

Teorema 24 (Odlučivost iskaznog računa) *Iskazni račun \mathcal{H} je odlučiv tj. postoji algoritam koji za svaku iskaznu formulu A odlučuje o tome da li je A teorema iskaznog računa.*

DOKAZ. Zbog Male teoreme kompletnosti, da bi formula A bila teorema potrebno je i dovoljno da je A tautologija, što možemo proveriti, na primer, konstrukcijom istinitosne tablice za A .

□

Kao što smo ranije napomenuli, ako iskazna formula A ima n iskaznih slova, njena istinitosna tablica ima 2^n vrsta, što znači da je metod istinitosnih tablica za proveravanje da li je data formula teorema eksponencijalne složenosti. Do sada nije nađen algoritam za odlučivanje da li je data iskazna formula tautologija (dakle, teorema iskaznog računa) koji bi bio polinomne složenosti.

12 Teorema kompletnosti i kompaktnost

Prelazimo sada na dokazivanje (velike) teoreme kompletnosti za iskazni račun \mathcal{H} . Kao i obično, jedan smer teoreme se lakše dokazuje - to je tzv. *pouzdanost* (engl. *soundness*) deduktivnog sistema.

Teorema 25 (Pouzdanost iskaznog računa \mathcal{H}) *Za sve skupove formula Σ i sve formule A važi:*

$$\text{ako } \Sigma \vdash A \text{ onda } \Sigma \models A.$$

DOKAZ. Neka je A_1, A_2, \dots, A_n dokazni niz za formulu A iz hipoteza Σ . Indukcijom po n dokažimo da je tada A semantička posledica skupa hipoteza Σ .

1. Neka je $n = 1$. Tada postoje dve mogućnosti: A je aksioma ili je $A \in \Sigma$. U oba slučaja $\Sigma \models A$.
2. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule čiji je dokazni niz kraći od n . Neka je sada A_1, A_2, \dots, A_n dokazni niz za formulu A iz hipoteza Σ . Tada je $A_n = A$ i za formulu A imamo tri mogućnosti: A je aksioma, $A \in \Sigma$ ili A sledi iz ranijih formula u nizu na osnovu pravila MP. U prva dva slučaja odmah imamo da je $\Sigma \models A$. Neka formula A sledi po pravilu MP iz formula A_i i $A_i \Rightarrow A$. Tada za formule A_i i $A_i \Rightarrow A$ važi indukcijska hipoteza pa je $\Sigma \models A_i$ i $\Sigma \models A_i \Rightarrow A$. No, tada je i $\Sigma \models A$.

□

Da bi dokazali obrat, tj. da iz $\Sigma \models A$ sledi $\Sigma \vdash A$ potreban nam je pojam (*maksimalno*) *konzistentnog* skupa formula.

Definicija 21 Za skup formula Σ kažemo da je **konzistentan** (ili **nepro-*tivrečan***) ako ne postoji formula A tako da je

$$\Sigma \vdash A \text{ i } \Sigma \vdash \neg A.$$

U suprotnom kažemo da je Σ **nekonzistentan** (ili **protivrečan**).

Teorema 26 1. Ako je skup formula Σ nekonzistentan, onda se iz Σ može izvesti bilo koja formula tj. $\text{Cons}(\Sigma) = \text{Form}$.

2. Skup formula Σ je konzistentan akko je skup svih posledica $\text{Cons}(\Sigma)$ konzistentan.

DOKAZ.

1. Ako bi $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash \neg A$, onda bi zbog pravila KONTR dobili da za svaku formulu B , $\Sigma \vdash B$.

2. Primetimo da svaki skup formula, koji u sebi sadrži nekonzistentan skup formula, jeste i sam nekonzistentan. Obrat, ako je skup $Cons(\Sigma)$ nekonzistentan, onda zbog Teoreme 20 (3) sledi da je i Σ nekonzistentan.

□

Sledeća, jednostavna ali važna, teorema daje vezu između izvodivosti formule iz datog skupa formula Σ i konzistentnosti skupa formula koji nastaje iz Σ dodavanjem negacije te formule.

Teorema 27 *Neka je Σ skup formula, A neka formula. Tada*

$$\Sigma \vdash A \text{ akko } \Sigma \cup \{\neg A\} \text{ nije konzistentan.}$$

DOKAZ. (\rightarrow) Neka je $\Sigma \vdash A$. Tada je $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash A$ i $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$, pa je $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nekonzistentan.

(\leftarrow) Neka je skup $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nekonzistentan. Tada se iz tog skupa može izvesti bilo koja formula, pa recimo i formula A . No, sada imamo da je $\Sigma \cup \{\neg A\} \vdash A$ pa je $\Sigma \vdash \neg A \Rightarrow A$. Kako je i $\Sigma \vdash A \Rightarrow A$, koristeći pravilo *SP* dobijamo da je $\Sigma \vdash A$.

□

Ponekad ćemo koristiti ekvivalentan oblik ove teoreme:

$$\Sigma \not\vdash A \text{ akko je } \Sigma \cup \{\neg A\} \text{ konzistentan.}$$

Lako se dokazuje i sledeća teorema:

Teorema 28 *Svaki skup formula koji ima model je konzistentan.*

DOKAZ. Neka je $\tau \models \Sigma$ i pretpostavimo da je Σ nekonzistentan. Tada za neku formulu A imamo $\Sigma \vdash A \wedge \neg A$. Tada bi zbog Teoreme pouzdanosti (T 25) imali $\Sigma \models A \wedge \neg A$, iz čega bi sledilo $\tau \models A \wedge \neg A$, kontradikcija. Dakle, Σ je konzistentan.

□

Da bi dokazali obrat prethodne teoreme, tj. da svaki konzistentan skup formula ima model, potreban nam je pojam *maksimalno konzistentnog* skupa formula.

Definicija 22 Za konzistentan skup formula Σ kažemo da je **maksimalno konzistentan** (ili **maksimalno neprotivrečan**) ako nije sadržan ni u jednom konzistentnom skupu različitim od sebe tj. ako je Γ konzistentan skup i $\Sigma \subseteq \Gamma$ onda mora $\Sigma = \Gamma$.

Primetimo da je svaki maksimalno konzistentan skup formula je deduktivno zatvoren. U sledećoj teoremi ćemo dokazati dve bitne osobine maksimalno konzistentnih skupova formula.

Teorema 29 Neka je Σ maksimalno konzistentan skup formula. Tada:

1. Za sve formule A ,

$$A \in \Sigma \text{ akko } \neg A \notin \Sigma.$$

2. Za sve formule A i B ,

$$A \wedge B \in \Sigma \text{ akko } (A \in \Sigma \text{ i } B \in \Sigma).$$

DOKAZ.

1. (\rightarrow). Neka je $A \in \Sigma$. Ako bi i $\neg A \in \Sigma$, onda bi Σ bio nekonzistentan.
 (\leftarrow). Pretpostavimo da $\neg A \notin \Sigma$ i dokažimo da tada $A \in \Sigma$. Pretpostavimo suprotno, da $A \notin \Sigma$. Tada bi $\Sigma \neq \Sigma \cup \{A\}$, pa zbog maksimalne konzistentosti skupa Σ imali bismo da skup $\Sigma \cup \{A\}$ nije konzistentan. Tada bi iz $\Sigma \cup \{A\}$ mogli izvesti bilo koju formulu, pa i $\neg A$. Tada je $\Sigma \vdash A \Rightarrow \neg A$, a kako je svakako $\Sigma \vdash \neg A \Rightarrow \neg A$, primenom pravila *SP* dobijamo $\Sigma \vdash \neg A$ tj. $\neg A \in \text{Cons}(\Sigma) = \Sigma$, kontradikcija.
2. (\rightarrow). Ako je $A \wedge B \in \Sigma$, onda $\Sigma \vdash A \wedge B$, pa primenom pravila *K1* i *K2* dobijamo $\Sigma \vdash A$ i $\Sigma \vdash B$, tj. kako je Σ deduktivno zatvoren, $A \in \Sigma$ i $B \in \Sigma$.
 (\leftarrow). Ako $A \in \Sigma$ i $B \in \Sigma$, onda primenom pravila *SK* dobijamo da $A \wedge B \in \text{Cons}(\Sigma) = \Sigma$.

□

Jedna od najvažnijih koraka ka dokazu teoreme kompletnosti iskaznog računa je sledeća teorema (poznata takođe pod nazivom *Lema Lindenbauma*):

Teorema 30 (Lindenbaum) *Svaki konzistentan skup formula je sadržan u nekom maksimalno konzistentnom skupu formula.*

DOKAZ. Neka je Σ dati konzistentan skup formula. Kako je skup iskaznih formula *Form* prebrojiv (kao unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova), neka je $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jedno nabranje svih elemenata skupa *Form*. Definišimo neopadajući niz skupova formula $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \dots$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \Sigma, \\ \Sigma_2 &= \begin{cases} \Sigma_1 \cup \{A_1\}, & \text{ako je skup } \Sigma_1 \cup \{A_1\} \text{ konzistentan,} \\ \Sigma_1, & \text{u suprotnom} \end{cases} \\ \dots & \\ \Sigma_{n+1} &= \begin{cases} \Sigma_n \cup \{A_n\}, & \text{ako je skup } \Sigma_n \cup \{A_n\} \text{ konzistentan,} \\ \Sigma_n, & \text{u suprotnom} \end{cases} \\ \dots & \end{aligned}$$

Tako dobijamo neopadajući niz skupova formula

$$\Sigma = \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \dots \subseteq \Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1} \subseteq \dots$$

Neka je

$$\Gamma = \bigcup_{n \geq 1} \Sigma_n.$$

Dokažimo da je Γ traženi maksimalno konzistentan skup formula koji proširuje Σ .

- Jasno, zbog konstrukcije, $\Sigma \subseteq \Gamma$.
- Dokažimo da je Γ konzistentan skup. Pretpostavimo suprotno, da Γ nije konzistentan skup. Tada bi postojao konačan podskup $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ koji takođe nije konzistentan. No, kako je $\Gamma = \bigcup_{n \geq 1} \Sigma_n$, onda zbog konačnosti skupa Γ_0 sledi da postoji k takav da je $\Gamma_0 \subseteq \Sigma_k$, što bi značilo da skup Σ_k nije konzistentan, kontradikcija. Dakle, skup Γ je konzistentan.
- Dokažimo da je Γ *maksimalno* konzistentan skup. Neka je $\Gamma \subseteq \Delta$, gde je Δ neki konzistentan skup formula, i pretpostavimo da je $\Gamma \neq \Delta$. Tada postoji formula A_i tako da je $A_i \in \Delta \setminus \Gamma$. Kako je $A_i \notin \Gamma$, to znači

da $A_i \notin \Sigma_{i+1}$, što zbog konstrukcije znači da je skup $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \cup \{A_i\}$ nekonzistentan. S druge strane, $\Sigma_i \subseteq \Gamma \subseteq \Delta$ i $A_i \in \Delta$, iz čega sledi da je $\Sigma_i \cup \{A_i\} \subseteq \Delta$, što bi značilo da skup Δ sadrži u sebi nekonzistentan skup formula Σ_{i+1} , kontradikcija. Prema tome, $\Gamma = \Delta$.

□

Teorema 31 *Svaki konzistentan skup formula ima model.*

DOKAZ. Neka je Σ konzistentan skup formula. Zbog Teoreme Lindenbauma (T 30) znamo da postoji maksimalno konzistentan skup Γ koji sadrži Σ . Ako nađemo model za Γ , to će ujedno biti i model za Σ . Model τ definišimo na sledeći način:

$$\tau(p_i) = \top \text{ akko } p_i \in \Gamma.$$

Dokažimo da je $\tau \models \Gamma$. Zapravo, dokazaćemo više: za svaku formulu A

$$\tau \models A \text{ akko } A \in \Gamma.$$

Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po složenosti formule A .

- Ako je formula A iskazno slovo p_i , onda po definiciji važi

$$\tau(p_i) = \top \text{ akko } p_i \in \Gamma.$$

- Pretpostavimo da za formule B i C važi tvrđenje. Dovoljno je dokazato da tada i za formule $\neg B$ i $B \wedge C$ važi tvrđenje. Tada, koristeći T 29 dobijamo sledeće:

$$\tau \models \neg B \text{ akko } \tau \not\models B \text{ akko } B \notin \Gamma \text{ akko } \neg B \in \Gamma.$$

Slično,

$$\tau \models B \wedge C \text{ akko } (\tau \models B \text{ i } \tau \models C) \text{ akko } (B \in \Gamma \text{ i } C \in \Gamma) \text{ akko } B \wedge C \in \Gamma.$$

Dakle, $\tau \models \Gamma$ pa je τ model i za skup Σ .

□

Sada smo spremni da dokažemo teži smer teoreme kompletnosti:

Teorema 32 *Za svaki skup formula Σ i svaku formulu A ,*

$$\text{ako } \Sigma \models A \text{ onda } \Sigma \vdash A.$$

DOKAZ. Neka je $\Sigma \models A$ i pretpostavimo da $\Sigma \not\vdash A$. Tada zbog Teoreme 27 sledi da je skup $\Sigma \cup \{\neg A\}$ konzistentan. Prema Teoremi 31 sledi da skup formula $\Sigma \cup \{\neg A\}$ ima model, označimo ga sa τ . No, tada bi $\tau \models \Sigma$ i $\tau \models \neg A$, pa bi zbog $\Sigma \models A$ imali da $\tau \models A$, kontradikcija. Prema tome, mora $\Sigma \vdash A$.
□

Teorema 33 (Teorema kompletnosti za iskazni račun) *Za sve skupove formula Σ i sve formule A ,*

$$\Sigma \models A \text{ akko } \Sigma \vdash A.$$

DOKAZ. Sledi iz Teoreme 32 i Teoreme 25.
□

Teorema 34 (Teorema kompaktnosti za iskaznu logiku) *Skup iskaznih formula Σ ima model ako i samo ako svaki konačan podskup od Σ ima model.*

DOKAZ. Naravno, smer (\rightarrow) je trivijalan.
 (\leftarrow) . Pretpostavimo da svaki konačan podskup od Σ ima model ali da Σ nema. Tada, zbog Teoreme 31 sledi da Σ nije konzistentan, postoji formula A , tako da je $\Sigma \vdash A \wedge \neg A$. No, tada postoji neki konačan $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ takav da je $\Sigma_0 \vdash A \wedge \neg A$. Ali tada skup Σ_0 ne bi imao model, kontradikcija.
□