# ZF sistem aksioma za teoriju skupova

U literaturi se mogu naći različiti spiskovi aksioma koji nose naziv **ZF sistem aksioma**. Razlog za to leži u činjenici da ni u jednom od tih sistema nisu sve aksiome nezavisne, pa uglavnom zavisi samo od ličnog ukusa autora koju aksiomu (i u kom obliku) će staviti, a koju će izostaviti sa spiska.

Zermelov aksiomatski sistem je prezentiran 1908 godine, i on je bio prvi aksiomatski sistem za teoriju skupova. Kasnije je taj sistem aksioma dopunio Fraenkel i tako dobijen spisak aksioma danas zovemo **ZF-sistem aksioma za teoriju skupova**, (i odgovarajuću formalnu teoriju **ZF teorija skupova**).

ZF teorija skupova je teorija prvog reda sa jednakošću. Podsetimo se da je u takvim teorijama "=" logički simbol, pri čemu se $x = y$ uvek interpretira kao jednakost objekata. Jedini nelogički simbol ZF teorije jeste binarni relacijski simbol "$\in$". Po dogovoru, umesto $\neg x \in y$ pišemo $x \notin y$.

U daljem ćemo uporedo, korak po korak, navoditi semantički zahtev koji opisuje intuitivan pojam skupa i odgovarajuću aksiomu formalne teorije, koja bi trebala da pokriva taj zahtev. Po dogovoru, u aksiomama ćemo podrazumevati univerzalne kvantifikatore po svim slobodnim promenljivama (tako da su sve aksiome univerzalno zatvorene).

| O jednakosti skupova | |
|---|---|
| 1. Ako dva skupa imaju iste elemente, oni su jednaki | $Ax1$. Aksioma ekstenzionalnosti $(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$ |

Primetimo da (zbog same prirode logičkog simbola =) u Aksiomi ekstenzionalnosti smer $\Leftarrow$ uvek važi. Nekada se umesto navedene formule, za $Ax1$. uzima formula

$$(\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z) \Rightarrow x = y,$$

što na kraju daje ekvivalentan sistem aksioma.

| O praznom skupu | |
|---|---|
| 2. Postoji skup koji nema elemente | $Ax2$. Aksioma praznog skupa $(\exists u)(\forall x) x \notin u$ |

Lako se može dokazati (na osnovu $Ax1$.) da je takav skup $u$, čiju egzistenciju obezbeđuje $Ax2$, jedinstven. Uobičajeno je da se obeležava sa $\emptyset$, i zove **prazan skup**. U daljem se koristi jezik, koji je proširen ovim novouvedenim simbolom, naravno imajući u vidu da je novi simbol otklonjiv u svim formulama na tako proširenom jeziku.

| O skupu sa dva elementa | |
|---|---|
| 3. Ako su $x$ i $y$ skupovi, onda postoji skup $z$ koji sadrži tačno $x$ i $y$ kao elemente. | $Ax3$. Aksioma para<br>$(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$ |

Rutinski, koristeći samo $Ax1$, može se dokazati da je skup $u$ iz $Ax3$. jedinstven; obeležavamo ga sa $\{x, y\}$. Po dogovoru, umesto $\{x, x\}$ pišemo $\{x\}$.

| O uniji | |
|---|---|
| 4. Ako je $x$ skup, onda postoji skup $y$ koji sadrži sve elemente elemenata od $x$. | $Ax4$. Aksioma unije<br>$(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow (\exists v)(v \in x \wedge z \in v))$ |

Skup $u$ iz $Ax4$. je jedinstven i obeležavamo ga sa $\bigcup x$. U slučaju da je $x = \{u, v\}$, umesto $\bigcup x$ pišemo $u \cup v$. Primetimo da na osnovu prve četiri aksiome možemo dokazati egzistenciju, na primer, sledećih skupova:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Uvedimo oznaku $z \subseteq x$ za formulu $(\forall t)(t \in z \Rightarrow t \in x)$. Kako je novouvedeni simbol otklonjiv, u daljem ga možemo slobodno koristiti, a da suštinski ne "pokvarimo" formalnu teoriju ZF. Ako je $z \subseteq x$, kažemo da je $z$ **podskup** od $x$.

| O partitivnom skupu | |
|---|---|
| 5. Ako je $x$ skup, onda postoji skup $u$ koji sadrži sve podskupove skupa $x$. | $Ax5$. Aksioma partitivnog skupa<br>$(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow z \subseteq x)$ |

Kao i ranije, skup $u$ iz $Ax5$. je jedinstven i obeležavamo ga sa $\mathcal{P}(x)$.

Primetimo da $Ax5$. govori samo o postojanju skupa **svih** podskupova nekog skupa $x$, a ne omogućuje da se dokaže postojanje nekog **specijalnog** podskupa od $x$, koji bi sadržao one elemente iz $x$ koji imaju neku zajedničku "osobinu". Naravno, upravo ovakvo izdvajanje (ili "skupljanje") objekata na osnovu neke njihove zajedničke osobine čini **suštinu** pojma skupa, pa svaka formalna teorija, koja ima za cilj da opiše intuitivnu teoriju skupova, mora izražavati ovaj semantički zahtev. S druge strane, nekritična i previše slobodna primena tog zahteva nas je i dovela do poznatih paradoksa u naivnoj teoriji skupova. Pomirenje ta dva suprotna kriterijuma u ZF teoriji je sadržano u tzv. **Aksiomi podskupa** (komprehenzije, izdvajanja).

| O slobodi formiranja skupa | |
|---|---|
| 6. Imati "što više", skupova ali izbeći (bar poznate) paradokse u teoriji skupova. | $Ax6$. Aksioma podskupa $(\exists u)(\forall x)(x \in u \Leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)))$ gde je $\varphi(x)$ proizvoljna formula jezika ZF, koja ne sadrži slob. prom. $u$. |

Naravno, za svaku takvu formulu $\varphi(x)$ imamo po jednu aksiomu, pa se za $Ax6$. kaže da je "šema aksioma". Kako je za sve odgovarajuće formule $\varphi(x)$ skup $u$ iz $Ax6$ jedinstven, uvodimo oznaku: $\{x : \ x \in z \wedge \varphi(x)\}$ ili $\{x \in z : \varphi(x)\}$. Dakle, $Ax6$. nam omogućava da, (pod uslovom da je $z$ neki skup), izdvojimo u skup one elemente iz $z$ koji imaju osobinu $\varphi$. Kako se "univerzalni skup" tj. kolekcija ovih skupova ne može formirati na osnovu $Ax6$, time smo izbegli sve ranije navedene paradokse koji su se javljali u naivnoj teoriji skupova.

Na osnovu $Ax1 - Ax6$. možemo definisati pojmove kao što su: presek, razlika, direktan proizvod skupova, relacije, funkcije, ordinali, kardinali ... Bez preterivanja, sve što koristimo u "svakodnevnom radu" u matematici. No, važno je primetiti da zasad nemamo obezbeđenu egzistenciju beskonačnog skupa. Svi skupovi, koji se mogu konstruisati na osnovu aksioma $Ax1 - Ax6$ su konačni. Beskonačnost "ulazi" u naš formalni sistem pomoću tzv. Aksiome beskonačnosti

| O beskonačnom skupu | |
|---|---|
| 7. Postoje beskonačni skupovi. | $Ax7$. Aksioma beskonačnosti $(\exists u)(\emptyset \in u \wedge (\forall z)(z \in u \Rightarrow z \cup \{z\} \in u))$ |

Kasnije ćemo detaljno razmatrati pitanje da li i u kojoj meri $Ax7$. pokriva odgovarajući semantički zahtev. Na ovom mestu napomenimo samo da skup $u$ iz $Ax7$ sadrži, kao svoje elemente sledeće skupove:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

i da ti skupovi imaju redom $0, 1, 2, 3, \ldots$ elemenata. Drugim rečima, skup $u$ iz $Ax7$, u stvari, u našem formalnom sistemu pokriva intuitivan pojam skupa prirodnih brojeva.

Na kraju su nam ostale dve bitne aksiome, koje imaju za zadatak da još više prilagode formalni sistem odgovarajućoj intuitivnoj teoriji. Prva od njih služi da proširi domen modela formalne teorije, a druga da je malo "skrati".

| O slikama skupova | |
|---|---|
| 8. Funkcija preslikava skup na skup | $Ax8$. Aksioma zamene<br>$(\forall a)((\forall x \in a)(\exists! y)\phi(x,y) \Rightarrow$<br>$(\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\phi(x,y))$<br>za sve formule $\phi(x,y)$ koje nemaju slob. prom. $z$. |

Naravno, i $Ax8$ je šema aksioma (kao $Ax6$). Ovu aksiomu je Zermelovom sistemu dodao Fraenkel, i mi ćemo je kasnije tokom rada nekoliko puta koristiti.

Kao što smo rekli, aksioma koja sledi "oduzima" od slobode formalnog sistema. Naime, ona služi da isključi takve "patološke" skupove u kojima bi važilo, na primer, $x \in x$ ili $x \in y \wedge y \in x$.

| O zabrani loših skupova | |
|---|---|
| 9. Ne postoje skupovi sa osobinama<br>$x \in x$<br>$x \in y, y \in x$<br>$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \cdots \ni x_n \ni \ldots$ | $Ax9$. Aksioma fundacije<br>$x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall t)\neg(t \in x \wedge t \in y)$ |

Nije teško dokazati da $Ax9$ zaista "postiže svoj cilj" tj. isključuje postojanje mnogih "patoloških" skupova. No, moguće je dokazati mnoge stvari i bez

$Ax9$ – često se prilikom izlaganja rezultata ZF teorije želi posebno naglasiti, da su dobijeni **bez** $Ax9$. Formalni sistem koji se oslanja samo na $Ax1 - Ax8$ obeležava sa $\text{ZF}^{-}$. Napomenimo, da se u teorijskom računarstvu često javljaju fenomeni koji imaju prirodan opis u $\text{ZF}^{-}$. $Ax1 - Ax9$ čine aksiomatski sistem za **ZF teoriju skupova**.

Sad, kada smo postavili "temelje" ZF teorije skupova, matematičke pojmove možemo uvoditi postepeno, korak po korak. Pri svakom koraku, u principu, može se ostati strogo u okvirima jezika ZF teorije. No, u praksi, to je nepotrebno i zamarajuće. Zbog toga, svaki put kada se uvede novi pojam, dogovaramo se o skraćenom zapisivanju (obeležavanju) određenih formula iz ZF teorije, dajemo imena novim pojmovima, i tako omogućavamo veću preglednost i ȩtljivost. Takođe, što je jako važno, na taj način ne gubimo kontakt sa našom matematičkom intuicijom, bez koje bi izgrađivanje bilo koje formalne matematičke teorije bilo mehaničko i bez lepote.