

Uređeni skupovi

- Za binarnu relaciju ρ skupa A kažemo da je **relacija uređenja** (ili samo **uređenje**) ako je ρ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija. Uobičajeno je da se uređenje obeležava simbolom \leq . Ako je dato neko uređenje \leq na nepraznom skupu A , onda par $\langle A, \leq \rangle$ zovemo **uređen skup**, sa **nosačem** A . Ponekad se kaže samo "uređen skup A ", i podrazumeva da je relacija uređenja označena sa \leq .
- Neka je $\langle A, \leq \rangle$ neki uređen skup. Na skupu A definišemo relaciju $<$ na sledeći način:

$$x < y \text{ akko } x \leq y \text{ i } x \neq y.$$

Tako dobijena relacija $<$ će biti irefleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. biće **relacija striktnog uređenja**. Kažemo da je relacija $<$ striktno uređenje **indukovano** sa \leq . Obratno, neka je sada ρ neko striktno uređenje na A . Ako relaciju ρ' na A definišemo sa:

$$x\rho'y \text{ akko } x\rho y \text{ ili } x = y,$$

onda je relacija ρ' jedno uređenje na A . U daljem tekstu, ako je dato neko striktno uređenje " $<$ ", odgovarajuće (indukovano) uređenje obeležavamo sa " \leq ", i obratno.

- Konačne (a i neke "lepe" beskonačne) uređene skupove je zgodno grafički predstaviti pomoću tzv. **Hasseovih dijagrama**. Na tim dijagramima se crta relacija **neposrednog pokrivanja** \prec definisana na sledeći način: $x \prec y$ akko $x < y \wedge (\neg \exists z \in A) x < z < y$. Ako je $x \prec y$, onda y predstavljamo kao tačku "iznad" x i spajamo ih crtom.

Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ uređen skup.

- Restrikcija uređenja \leq je ponovo uređenje tj. ako je $\emptyset \neq B \subseteq A$, onda je i $\langle B, \leq|_B \rangle$ uređen skup. Po ranijem dogovoru, umesto $\leq|_B$ najčešće pišemo samo \leq .
- Sa \geq obeležavamo inverziju relacije \leq , tj.

$$x \geq y \text{ akko } y \leq x.$$

$\mathcal{A}^d = \langle A, \geq \rangle$ je takođe uređen skup. Kažemo da je \mathcal{A}^d uređen skup koji je **dualan** uređenom skupu \mathcal{A} .

- Ako je φ neko tvrđenje o uređenim skupovima, **dualno** tvrđenje se od φ dobija tako što se svuda umesto \leq stavi \geq i obrnuto.
- Za elemente $x, y \in A$ kažemo da su **uporedivi** ako je $x \leq y$ ili $y \leq x$.
- Ako su svaka dva elementa iz A uporediva, za $\langle A, \leq \rangle$ kažemo da je **linearно** (ili **totalно**) **uređen skup** ili da je **lanac**. Ako u uređenom skupu nema različitih uporedivih elemenata, uređen skup je **antilanac**.
- Ako je $C \subseteq A$ i $\langle C, \leq \rangle$ lanac, kažemo da je C **lanac u** $\langle A, \leq \rangle$. U slučaju da je $C = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \subseteq A$ i važi $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$, kažemo da je C **opadajući lanac u** $\langle A, \leq \rangle$. Dualno se definiše pojam **rastućeg lanca**.
- Ako je $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ lanac u A , **dužina lanca** C jeste n (primetimo da C ima $n + 1$ element).
- Neka je $C \subseteq A$. Za element $c \in A$ kažemo da je **gornje ograničenje za** C ako je $x \leq c$, za sve $x \in C$. Dualno se definiše **donje ograničenje za** C . Skup svih gornjih ograničenja od C obeležavamo sa C^u , a skup svih donjih ograničenja sa C^l .
- Ako je element $a \in A$ gornje ograničenje za ceo skup A , zovemo ga **najveći u** \mathcal{A} . Dualno se definiše **najmanji element** uređenog skupa.
- **Maksimalni element** od \mathcal{A} jeste svaki element $m \in A$ za koji ne postoji $x \in A$ takav da je $m < x$. Dualno se definiše pojam **minimalnog elementa**.
- Primetimo da dok u datom uređenom skupu maksimalnih (odnosno minimalnih) elemenata može biti i više od jednog, najvećih (odnosno najmanjih) može biti najviše jedan.

Neka su $\mathcal{A} = \langle A, \leq_1 \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, \leq_2 \rangle$ dva uređena skupa.

- Kažemo da su \mathcal{A} i \mathcal{B} **izomorfni** (u oznaci $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) ako postoji bijekcija $f : A \rightarrow B$ tako da za sve $x, y \in A$ važi:

$$x \leq_1 y \text{ akko } f(x) \leq_2 f(y).$$

Za preslikavanje f u tom slučaju kažemo da je **izomorfizam** iz \mathcal{A} u \mathcal{B} .

- Uređeni skupovi su **dualno izomorfni** ako je $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}^d$.
- Kažemo da se \mathcal{A} **potapa u** \mathcal{B} ako postoji injekcija $f : A \rightarrow B$ takva da važi uslov

$$x \leq_1 y \text{ akko } f(x) \leq_2 f(y).$$

U tom slučaju za f kažemo da je **potapanje** \mathcal{A} u \mathcal{B} .

- Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da **čuva poredak** (ili da je **monotona**) ako za sve $x, y \in A$ važi

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y).$$

- Neka su $\mathcal{A} = \langle A, <_1 \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle A, <_2 \rangle$ dva striktno uređena skupa. Kažemo da su oni **izomorfni** (u oznaci $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$) ako postoji bijekcija $f : A \rightarrow B$ tako da za sve $x, y \in A$ važi

$$x <_1 y \text{ akko } f(x) <_2 f(y).$$

Za preslikavanje f u tom slučaju kažemo da je **izomorfizam** između \mathcal{A} i \mathcal{B} . Primetimo da važi:

$$\langle A, <_1 \rangle \cong \langle B, <_2 \rangle \text{ akko } \langle A, \leq_1 \rangle \cong \langle B, \leq_2 \rangle,$$

tj. dva striktno uređena skupa su izomorfna akko su izomorfni odgovarajući indukovani uređeni skupovi.

- U slučaju striktno uređenih skupova $\langle A, <_1 \rangle$ i $\langle B, <_2 \rangle$ za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **monotona** ako za sve $x, y \in A$ važi

$$(2) \quad \text{ako } x <_1 y \text{ onda } f(x) <_2 f(y).$$

Nekad se za funkciju $f : A \rightarrow B$ koja zadovoljava uslov (2) kaže da je **strogo monotona** funkcija *uređenog skupa* $\langle A, \leq_1 \rangle$ u *uređen skup* $\langle B, \leq_2 \rangle$.

- **Definicija 1.** Za uređen skup $\langle A, \leq \rangle$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki neprazan podskup od A ima najmanji element. Ako je $\langle A, \leq \rangle$ dobro uređen skup, za relaciju \leq kažemo da je **dobro uređenje** na A ili da **dobro uređuje** A . Za striktno uređen skup $\langle A, < \rangle$ kažemo da je **striktno dobro uređen skup** ako je $\langle A, \leq \rangle$ dobro uređen skup.

- **Definicija 2** Za relaciju $\sigma \subseteq A^2$ kažemo da zadovoljava **uslov trihotomije** (na A) ako za sve $x, y \in A$ važi tačno jedan od sledećih uslova:

$$x\sigma y \text{ ili } x = y \text{ ili } y\sigma x.$$

- **Definicija 3** Za uređen skup $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ kažemo da zadovoljava **uslov minimalnosti** ako svaki neprazan podskup od A ima minimalni element.

- **Teorema 1.** Neka je $A \neq \emptyset$, $<$ binarna relacija na A . Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(1) $\langle A, < \rangle$ je striktno dobro uređen skup;

(2) Relacija $<$ je tranzitivna i zadovoljava uslove trihotomije i minimalnosti.

- **Teorema 2** Za svako monotono preslikavanje $\varphi : A \rightarrow A$ striktno dobro uređenog skupa $\langle A, < \rangle$ u sebe važi $a \leq \varphi(a)$, za sve $a \in A$.

- **Definicija 4** Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \leq \rangle$ uređen skup i $a \in A$. **Početni segment od \mathcal{A} (određen elementom a)** jeste skup $\text{pred}_{\mathcal{A}}(a)$ skup svih elemenata iz A koji su strogo manji od a tj.

$$\text{pred}_{\mathcal{A}}(a) = \{x \in A : x < a\}.$$

Jasno, $\langle \text{pred}_{\mathcal{A}}(a), \leq \rangle$ je takođe uređen skup, koga ćemo takođe zvati **početni segment od \mathcal{A} (određen elementom a)**. Analogno, ako je \mathcal{A} striktno uređen skup, smatraćemo da njegovi početni segmenti nasleđuju striktni poredak sa \mathcal{A} . Lako se vidi da su početni segmenti (striktno) dobro uređenih skupova ponovo (striktno) dobro uređeni skupovi. Ako se iz konteksta vidi o kom (striktno) uređenom skupu \mathcal{A} se radi, onda umesto $\text{pred}_{\mathcal{A}}(a)$ pišemo samo $\text{pred}(a)$.

- **Teorema 3** *Striktno dobro uređen skup ne može biti izomorfan svom početnom segmentu.*
- **Teorema 4** *Neka su $\mathcal{A} = \langle A, <_1 \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, <_2 \rangle$ striktno dobro uređeni skupovi. Tada postoji najviše jedan izomorfizam između \mathcal{A} i \mathcal{B} .*