Paradoksi

Pronalazak paradoksa

•Cantorova otkrića u apstraktnoj teoriji skupova: u početku nepoverenje, filozofi nezainteresovani..
•Oko 1895: teorija skupova dostiže vrhunac…Cantor sreće prvi paradoks u svojoj teoriji
•Piše Hilbertu 1896, ali ga ne publikuje (paradoks se javio u tehničkom delu teorije…)
•Godinu dana kasnije Burali-Forti ponovo otkriva isti paradoks, i objavljuje ga
•Burali-Fortijev paradoks (1897): “Po jednoj teoremi, dobro uređen skup W svih ordinala ima veći ordinal od svih elementata iz W. No, to bi značilo da je W veći od svih ordinala, pa i od samog sebe.”

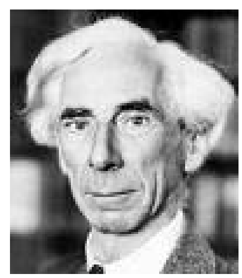
… i stižu novi paradoksi…

•Dve godine kasnije Cantor otkriva sličan paradoks u teoriji kardinala (publikuje ga 1932)

•Cantorov paradoks (1899): “ Po Cantorovoj teoremi, skup P(S) ima veći kardinalni broj nego skup S. Posmatrajmo sada skup svih skupova U. Tada P(U) ima veći kardinalni broj nego U, što je nemoguće jer P(U) je podskup od U.”

•U junu 1901. Bertrand Russell zapaža isti fenomen i posle analize dokaza Cantorove teoreme konstruiše novi paradoks, koji je mnogo elementarniji (ne treba nam pojam ordinala, kardinala, čak ni partitivnog skupa)

Russellov paradoks



•Russellov paradoks (1903): “ Posmatrajmo skup S svih onih skupova koji nisu sami sebi elementi”. Da li je S element skupa S ili nije? Obe moguće pretpostavke nas dovode do kontradikcije tj. dobijamo da je S element od S ako i samo ako S nije element od S.”
•Russell obaveštava Fregea pismom o svom otkriću i publikuje paradoks 1903.
•Nezavisno od Russella, isti paradoks otkriva grupa matematičara (sa Zermelom na čelu) u Göttingenu
•Za razliku od prethodne dva paradoksa, Russellov paradoks je bio šok za one matematičare koji su se u to vreme bavili osnovama matematike
Kako ko prima paradoks?
•Dedekind – njegov esej o prirodi i smislu brojeva se bazira na Cantorovoj teoriji skupova, pa Dedekind zaustavlja publikovanje tog eseja

•Frege – on je bio najviše u šoku – baš onda je stavljao poslednje crte na svoj rad o formalnim sistemima, u Apendiksu kaže da je Russellovo otkriće uzdrmalo temelje njegove knjige
•Poincare – vodeći matematičar tog vremena, koji je u početku propagirao primenu teorije skupova, okreće se protiv te teorije
•A CANTOR? – Iako nije mogao da reši Russellov paradoks, on nije ni za trenutak izgubio veru u svoju teoriju
•HILBERT:” … većina matematičara ipak ne želi da bude izgnana iz raja u koji nas je Cantor uveo…”

Paradoksi koji liče na Russellov

•Paradoks lažova: Epimenid:"Svi Krićani lažu." – jasnije: "Ja sada lažem." ili "Ova rečenica je lažna"

…i još paradoksa…

•Richardov paradoks (1905): (karikatura Cantorovog dijagonalnog postupka) Posmatrajmo one brojeve između 0 i 1 koji se mogu okaraktrisati rečenicom konačne dužine. Ovakvih brojeva ima prebrojivo mnogo, pa ih ispišimo u lisu L. Neka je r broj koji se pravi na sledeći način: Na i-tom decimalnom mestu u zapisu broja r stoji 1, ako i-ti broj u listi L na i-tom decimalnom mestu ima cifru različitu od 1; u suprotnom, na i-tom decimalnom mestu u broju r stoji cifra 2. Da li je broj r na listi L?

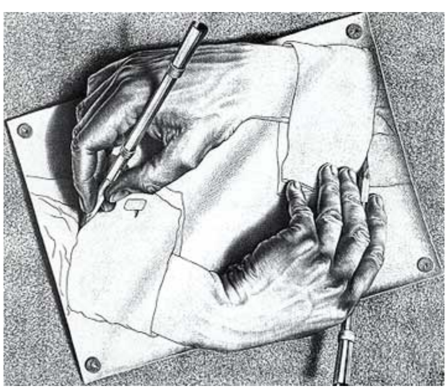
…paradoks koji nije matematički…

•Grellingov paradoks (1908): Neke reči imaju istu osobinu koju znače: na primer reš "srpska" srpska reč, "višesložna" je višesložna reč, itd… Druge reči opet nemaju tu osobinu: "crvena" nije crvena reč, ili "daleko", "cvet",… Ovakve reči ćemo zvati <u>heterogene.</u> Pitanje je: Da li je reč "heterogena" heterogena reč ili nije?

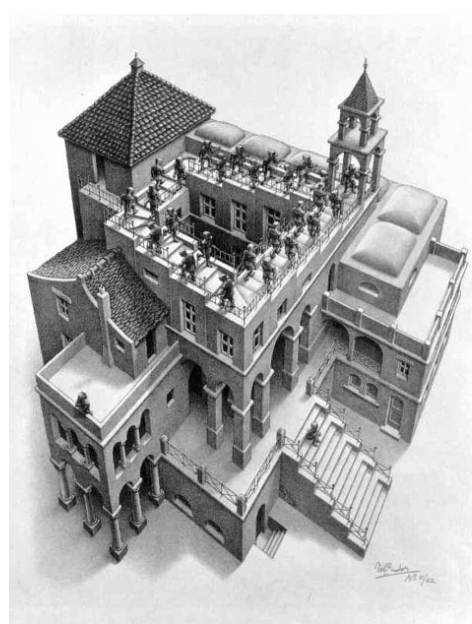
Evo sada nacrtani paradoksi

Escher: Print Gallery

Escher: Waterfall



Escher: Drawing hands



Escher: Ascending and descending

Analiza paradoksa

•Šta je zajedničko u tim paradoksima?

•"samopozivanje" (self-reference)

•Ključni pojam se definiše pomoću neke totalnosti kome pripada

•Kruženje u argumentaciji

•Mnogi matematičari su se zabrinuli, jer se paradoksi javljaju u osnovama matematike, a i logika je dovedena u pitanje…

•Pojava paradoksa je dovela do snažnog razvoja matematičke logike a i matematike uopšte…

Kako izbeći paradokse u teoriji skupova?

• **Logicistički pristup**: Logicisti smatraju da je *matematika deo logike, i da za "popravljanje"* osnova matematikepre svega treba intervenisati u logici.
- Russellova teorija tipova
- Quine: New Foundation for Mathematical Logic (NF) – nije saglasna sa AC!

• **Intuicionistički pristup**

•Radikalno menjaju logiku
•Dovodi u pitanje čitave grane klasične matematike
•Ideje intuicionizma prvi put su izrekli Kronecker i njegovi saradnici (1870-1880), oglašavajući se protiv metoda Weierstrassa
•Nov podstrek: 1904: Dokazana je teorema o dobrom uređenju
•Brower, 1907: eksplicitno definiše teze intuicionizma
•Heyting, 1930: aksiome
•Ne priznaju univerzalni karakter nekih osnovnih zakona logike (zakon o isključenju trećeg, dvojna negacija,…)
•Postojanje u matematici se poklapa sa konstruktibilnošću
•Ne priznaju indirektne dokaze: ako treba da dokažemo da postoji neki x sa osobinom A(x), onda se to ne može dokazati tako da se dokaže da nije za sve x ne A(x) (to je samo povod za traganje za konstruktivnim dokazom)

• **Aksiomatski pristup**

•Opis neke konkretne teorije: izdvojimo osnove objekte, relacije koje postoje među time objektima (aksiome), dogovorimo se o pravilima izvođenja, i posle samo radimo u formalnoj teoriji
•Prvi aksiomatski sistema za teoriju skupova: Zermelo, 1908.
•Posle je Fraenkel dopunio taj sistema aksioma, pa se sad zove Zermelo-Fraenkelova (ZF) teorija skupova
•NBG sistema akioma: Neumann (1925), a zatim su ga dopunili R. Robinson, P. Bernays i K. Gödel.
•Von Neumannova ideja: nisu nezgodni veliki skupovi, nego to što dozvoljavamo da oni budu posle nečiji elementi – objekte kojima je zabranio da budu nečiji elementi zovemo KLASE, a oni drugi su SKUPOVI
•NBG teorija ima konačno mnogo aksioma
•ZF teorija se može smatrati za podteoriju NBG teorije
•ZF je neprotivrečna akko je NBG neprotivrečna