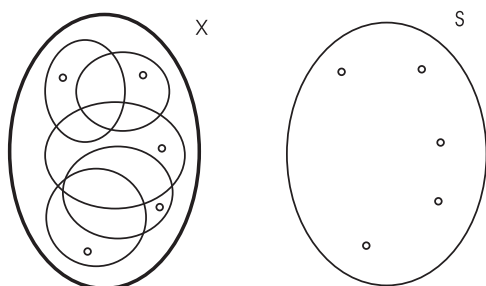


Aksioma izbora



Slika 1.

Ako je X skup nepraznih skupova, da li postoji skup S (tzv. **selekcioni** ili **izborni skup**) koji sadrži tačno po jedan element iz svih tih nepraznih skupova? Tvrdjenje koje kaže da "izborni skup" uvek postoji, poznato je pod imenom **Aksioma izbora**:

- **Aksioma izbora (AC)**

*Neka je X skup nepraznih skupova. Tada postoji skup S (tzv. **selekcioni** ili **izborni skup**) koji sadrži tačno po jedan element iz svih elemenata skupa X .*

Mnogi matematičari, uključujući i Cantora, koristili su neki oblik Aksiome izbora još krajem XIX veka, ali je nisu eksplicitno navodili. Prvi put je eksplicitno navodi G. Peano, 1890 godine, jer je pri dokazu jedne teoreme u teoriji običnih diferencijalnih jednačina naišao na problem koji je zahtevao rezonovanje koje je izraženo u AC. Beppo Levi je 1902. godine pokazao da se ne može dokazati da je unija disjunktih nepraznih skupova koji čine skup X veće ili jednake moći (kardinalnost) nego skup X , i da se dokaz može dati samo u slučaju da možemo da istaknemo po jedan element iz svakog skupa iz X . B. Russell je Aksiomu izbora 1906. godine formulisao ovako:

- **Multiplikativna aksioma** *Ako je X skup disjunktih nepraznih skupova, onda je $\prod X \neq \emptyset$.*

Zermelo je Multiplikativnu aksiomu formulisao u opštem slučaju, tako da skupovi u X ne moraju biti disjunktini.

Prema tome, ako prihvatimo princip o postojanju izbornog skupa, našem formalnom sistemu ZF treba dodati sledeću aksiomu:

O postojanju izbornog skupa	
10. Za svaki skup X disjunktih nepraznih skupova postoji izborni skup.	Ax10. Aksioma izbora (AC) $(\forall x, y \in X)(x \neq \emptyset \wedge (x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)) \Rightarrow$ $(\exists S)(\forall t \in X)(\exists! u)u \in t \cap S$

Teoriju ZF+AC, u kojoj je aksiomama ZF teorije dodata Aksioma izbora, obeležavamo sa ZFC.

Prilikom pokušaja dokaza AC pronađeni su mnogi ekvivalenti te aksiome. Tek **posle** pronalazjenja ekvivalenata Aksiome izbora postala je sumnjiva njena "jednostavnost i očiglednost". Tako, mnogi matematičari su počeli da odbacuju AC posle dokaza da je AC ekvivalentna sa tvrdjenjem da se svaki skup može dobro urediti.

Definicija 1. Za uređen skup $\langle A, \leq \rangle$ kažemo da je **dobro uređen** ako svaki neprazan podskup od A ima najmanji element. Ako je $\langle A, \leq \rangle$ dobro uređen skup, za relaciju \leq kažemo da je **dobro uređenje** na A ili da **dobro uređuje** A .

- **Zermelov princip dobrog uređenja**

Svaki skup se može dobro urediti.

Drugi ekvivalent Aksiome izbora, a koji se vrlo često koristi u matematici uopšte, jeste sledeće tvrdjenje:

- **Lema Zorna**

Neka je A proizvoljan uređen skup. Ako u A svaki lanac ima gornje ograničenje, tada A ima bar jedan maksimalni element.

Posmatrajmo sada skup L svih lanaca u nekom uređenom skupu \mathcal{A} . Naravno, skupovna inkluzija " \subseteq " jeste jedno uređenje na L . Maksimalni element od $\langle L, \subseteq \rangle$, ako postoji, zovemo **maksimalni lanac** u \mathcal{A} . Prirodno je postaviti pitanje, da li se svaki lanac u \mathcal{A} može "proširiti" do nekog maksimalnog. Hausdorff je dokazao da je sledeće tvrdjenje ekvivalentno Aksiomi izbora:

- **Hausdorffov princip maksimalnosti**

Neka je \mathcal{A} proizvoljan uređen skup. Tada je svaki lanac u \mathcal{A} sadržan u nekom maksimalnom lancu.

Kakav je odnos AC sa aksiomama teorije ZF? K. Gödel je 1939. godine dokazao da je AC saglasna sa ZF teorijom tj. ako je ZF neprotivrečna teorija, onda je neprotivrečna i ZF teorija kojoj je dodata Aksioma izbora. Težim se pokazalo pitanje da li se AC može **izvesti** iz aksioma ZF. Zbog "**jednostavnosti i očiglednosti**" Aksiome izbora, preovlađujući osećaj u vezi sa njom bio je da se verovatno **može izvesti** iz aksioma ZF teorije. Međutim, 1963. godine Cohen je dokazao da se, u odnosu na ZF, Aksioma izbora ponaša kao Aksioma o paralelama u geometriji: AC je nezavisna od ZF teorije tj. ako je ZF neprotivrečna, onda je neprotivrečna i ZF teorija kojoj je dodata negacija Aksiome izbora.

Koliko god ove teoreme formalno **u potpunosti** razrešavaju status AC u odnosu na ZF teoriju, dopuštamo da će neki čitaoci i dalje ostati u dilemi: "Pa, dobro, da li je AC, **u stvari**, tačna ili ne?" Ova dilema, naravno, ima pre svega **filozofski karakter**. Pitanje istinitosti AC je najzanimljivije za matematičare koji su najbliži filozofiji Platonista. Zaista, ako van nas postoji "idealni svet skupova", onda u tom svetu AC ili važi ili ne važi. S druge strane, za finitiste to pitanje ima trivijalan pozitivan odgovor, jer oni rade samo sa konačnim familijama konačnih skupova, a u tom slučaju AC naravno važi. Prema formalističnom stavu, pitanje "tačnosti" AC nema smisla. Naime, ZF teorija opisuje zamišljene objekte, skupove, koje niko nigde **u stvari** nije video. Ako se dogovorimo da je "svet skupova" ono što opisuje ZF, onda je taj opis **nepotpun**. Prosto, AC je takva formula, da se ni ona ni njena negacija ne može izvesti iz aksioma ZF teorije. Prema tome, postoje "svetovi" (tj. modeli ZF teorije) u kojima je AC **tačna**, a postoje i "svetovi" u kojima AC **ne važi**.