10 Predikatska logika sa jednakošću

U mnogim važnim matematičkim teorijama prvog reda koristimo jednu posebnu binarnu relaciju - relaciju *jednakosti* "=". Prema definiciji jezika prvog reda, svi relacijski simboli imaju "isti tretman" - u modelima se mogu interpretirati kao relacije na nosaču modela, jedino što se mora "paziti" jeste da se arnost tih relacija poklapa sa unapred zadatim arnostima relacijskih simbola. Prirodno je, međutim, da za relaciju jednakosti ne želimo takvu slobodu - jednostavno želimo da se simbol "=" uvek interpretira kao obična relacija jednakosti. Da bi se to postiglo, modifikovaćemo predikatski račun tako što simbol jednakosti nećemo više tretirati kao relacijski simbol, nego kao *logički simbol*, koji u svim modelima ima istu interpretaciju. Ta modifikacija predikatske logike se zove **predikatska logika sa jednakošću** ili **logika prvog reda sa jednakošću**. Odgovarajući deduktivni sistem se obično naziva **predikatski račun sa jednakošću** ili **jednakosna logika**.

Da bismo izbegli moguću konfuziju zbog različitih tumačenja simbola "=", koristićemo poseban simbol $\approx$ u sintaksi logike, dok ćemo oznaku "=" zadržati u meta-teoriji - on će označavati "baš-baš jednakost" među objektima.

Definicija 20 *Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda.* ***Logika prvog reda sa jednakošću tipa $\mathcal{L}$*** *ili* ***predikatska logika sa jednakošću tipa $\mathcal{L}$****, u oznaci $\mathcal{L}^{\approx}$, se razlikuje od obične logike prvog reda tipa $\mathcal{L}$ po sledećem:*

- *ima dodatni logički simbol $\approx$*
- *ima dodatni tip elementarnih formula, izraze oblika $t_1 \approx t_2$, gde su t_1, t_2 proizvoljni termi na jeziku $\mathcal{L}$,*
- *ako je $\mathcal{M}$ model tipa $\mathcal{L}$, $\tau : X \to M$ neka valuacija tog modela, onda se važenje elementarne formule $t_1 \approx t_2$ u modelu $\mathcal{M}$ definiše na sledeći način:*
$$\mathcal{M} \models_\tau t_1 \approx t_2 \text{ akko } t_1^{\mathcal{M}}[\tau] = t_2^{\mathcal{M}}[\tau].$$

Primer 21 ...

Deduktivni sistem koji odgovara predikatskoj logici sa jednakošću zovemo *predikatski račun sa jednakošću* ili *jednakosna logika.* On se od običnog predikatskog računa razlikuje po tome, što ima dodatne logičke aksiome, koje opisuju osobine jednakosti: refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, slaganje sa funkcijskim i relacijskim simbolima.

Definicija 21 *neka je $\mathcal{L} = \mathcal{C} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$ neki jezik prvog reda.* ***Predikatski račun sa jednakošću tipa*** *$\mathcal{L}$ (ili* ***jednakosna logika tipa*** *$\mathcal{L}$), u oznaci $\mathcal{K}_{\mathcal{L}}^{\approx}$, se od običnog predikatskog računa tipa $\mathcal{L}$ razlikuje po tome što ima sledeće dodatne logičke aksiome (tzv.* ***aksiome jednakosti****):*

(E1) $t \approx t$, *za sve terme* t

(E2) $t \approx s \Rightarrow s \approx t$, *za sve terme* t, s

(E3) $t \approx s \wedge s \approx u \Rightarrow t \approx u$, *za sve terme* s, t, u

(E4) *za sve* $n \geq 1$, *sve funkcijske simbole* $f \in \mathcal{F}_n$, *i sve termove* $t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots, t_n$ *važi:*

$$\begin{array}{rcl} & \textit{ako} & \\ t_1 & \approx & s_1 \\ t_2 & \approx & s_2 \\ & \ldots & \\ t_n & \approx & s_n \\ & \textit{onda} & \\ f(t_1, t_2, \ldots, t_n) & \approx & f(s_1, s_2, \ldots, s_n) \end{array}$$

(E5) *za sve* $n \geq 1$, *sve relacijske simbole* $\rho \in \mathcal{R}_n$, *i sve termove* $t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots, t_n$ *važi:*

$$\begin{array}{rcl} & \textit{ako} & \\ t_1 & \approx & s_1 \\ t_2 & \approx & s_2 \\ & \ldots & \\ t_n & \approx & s_n \\ & \textit{onda} & \\ \rho(t_1, t_2, \ldots, t_n) & \Leftrightarrow & \rho(s_1, s_2, \ldots, s_n) \end{array}$$

Svi ostali pojmovi iz običnog predikatskog računa (kao što je pojmovi *sintaktičke posledice, teoreme*, operatori Cons, Mod, itd.) se prenose u predikatski račun sa jednakošću bez promene, jedino što sada imamo širi skup logičkih aksioma.

Primer 22 ...

Teorema 24 (Teorema kompletnosti za predikatski račun sa jednakošću) *Svaka logika prvog reda sa jednakoččću tipa $\mathcal{L}$ je kompletna tj. za sve skupove formula Σ i sve formule A tipa $\mathcal{L}$ važi:*

$$\Sigma \models A \text{ akko } \Sigma \vdash A.$$

Dokaz. Videti recimo ...
□

Kao i ranije, svaki skup formula Σ u predikatskom računu sa jednakošću tipa $\mathcal{L}$ zovemo **teorija (prvog reda) sa jednakošću (tipa $\mathcal{L}$)**. Za skup formula Δ kažemo da je **skup aksioma za teoriju** Σ ako imaju isti skup sintaktičkih posledica.

Teorema 25 *U svakom predikatskom računu sa jednakošću, skup formula Δ je skup aksioma za teoriju prvog reda Σ akko $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \mathrm{Mod}(\Delta)$.*

Dokaz. Po definiciji, korišćenjem Teoreme kompletnosti za predikatski račun sa jednakošću.
□

Na kraju, navedimo primere nekih teorija prvog reda sa jednakošću.

Primer 23 (Teorija parcijalnog uređenja) *Jezik teorije parcijalnog uređenja ima jedan jedini nelogički simbol, binaran relacijski simbol koji se najčešće obeležava sa $\leq$. Ova teorija ima sledeće aksiome:*

(P1) $x \leq x$,

(P2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x \approx y$,

(P3) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Modele te teorije zovemo parcijalno uređeni skupovi*. U teoriji parcijalnih uređenja se mogu definisati pojmovi* minimalnog (maksimalnog) elementa, donjeg (gornjeg) ograničenja, infimuma (supremuma)*, i tako stići do pojma* mrežno uređenog skupa *kao parcijalno uređenog skupa u kome za svaka dva elementa postoji njihov supremum i infimum.*

Primer 24 (Teorija mreža) *U prethodnom primeru smo* mrežno uređene skupove *definisali kao specijalne uređene skupove. Drugi, u suštini ekvivalentan, pristup teoriji mreža polazi od jezika prvog reda sa jednakošću $\mathcal{L}$ koji od nelogičkih simbola ima dva binarna funkcijska simbola, koji se najčešće obeležavaju sa $\vee, \wedge$ i ne treba ih pobrkati sa odgovarajućim logičkim veznicima! (U slučaju da se u praksi moraju koristiti i logički veznici konjunkcije i disjunkcije, oni se obeležavaju drugim simbolima.) Aksiome* teorije mreža su:

(L1) $x \wedge x \approx x$,

(L1') $x \vee x \approx x$,

(L2) $x \wedge y \approx y \wedge z$,

(L2') $x \vee y \approx y \vee z$,

(L3) $(x \wedge y) \wedge z \approx x \wedge (y \wedge z)$,

(L3') $(x \vee y) \vee z \approx x \vee (y \vee z)$,

(L4) $x \wedge (x \vee y) \approx x$,

(L4') $x \vee (x \wedge y) \approx x$.

Primer 25 (Teorija grupa) *Postoji nekoliko ekvivalentnih definicija pojma grupe, od kojih su neki i na različitim jezicima. Na primer, možemo uzeti da jezik teorije grupa od nelogičkih simbola ima jedan binaran funkcijski simbol $\cdot$, jedan unaran $'$ i jedan simbol konstante e. Aksiome teorije grupa su:*

(G1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$,

(G2) $x \cdot e \approx x$,

(G3) $x \cdot x' \approx e$.

Ukoliko dodamo aksiomu
(G4) $x \cdot y \approx y \cdot x$
dobijamo teoriju Abelovih (komutativnih) grupa.

Primer 26 (Formalna aritmetika ili Teorija brojeva) *Jezik formalne aritmetike sadrži dva binarna funkcijska simbola* $+, \cdot$, *jedan unaran funkcijski simbol* S *i jedan simbol konstante* 0, *i ima sledeće aksiome:*

(B1) $\neg S(x) \approx 0$,

(B2) $S(x) \approx S(y) \Rightarrow x \approx y$,

(B3) $x + 0 \approx x$,

(B4) $x + S(y) \approx S(x + y)$,

(B5) $x \cdot 0 \approx 0$,

(B6) $x \cdot S(y) \approx (x \cdot y) + x$,

(B7) Za svaku formulu $A(x)$ *važi*

$$(A(0) \wedge (\forall x)(A(x) \Rightarrow A(S(x)))) \Rightarrow (\forall x)A(x).$$

Naravno, jedan model te teorije je skup prirodnih brojeva sa uobičajenim operacijama $+$ *i* $\cdot$, *gde je* $S(x) = x + 1$, *i taj model zovemo* standardni model formalne aritmetike. *Može se dokazati da Formalna aritmetika ima i nestandardne modele. Takođe, ova teorija igra ključnu ulogu u Gödelovim rezultatima o nepotpunosti (o čemu će biti reči kasnije).*