

GODIŠNJI KOLOKVIJUM IZ
ANALIZE ALGORITAMA

23. MART 2002.

1. Odgovoriti na sledeća pitanja i obrazložiti odgovore.

- a) Neka za sve prirodne $x \geq 0$ važi nejednakost $f(x) \leq g(h(x))$, gde su g i h prosto rekurzivne funkcije. Da li tada i f mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- b) Neka za sve prirodne $x \geq 0$ važi nejednakost $f(x) \leq g(x)$, gde se $g(x)$ dobija od $h(x, y)$ primenom šeme proste rekurzije na sledeći način: $g(0) = 1$, $g(x + 1) = h(x, g(x))$. Ako su g i h prosto rekurzivne funkcije, da li tada i f mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- c) Neka za sve prirodne $x \geq 0$ važe nejednakosti $f(x) \leq \mu_t(g(h(x), t) = 0) \leq \alpha(x)$, gde su g , h i α prosto rekurzivne funkcije (g arnosti 2, ostale arnosti 1). Da li tada i f mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- d) Neka je $f(x) = \lfloor \frac{g(x)}{h(x)} \rfloor - g(x)h(x)$. Ako su funkcije f i g prosto rekurzivne, da li tada i $h(x)$ mora biti prosto rekurzivna?
- e) Da li je skup $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je stepen prostog broja i } x \equiv 2 \pmod{3}\}$ rekurzivan?

2. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \text{suma delitelja broja } x, & 1 \leq x \leq 99, \\ \text{broj prostih deljitelja broja } x, & x \geq 100, x \equiv 1 \pmod{2}, \\ \text{najveći prost deljitelj broja } x, & x \geq 100, x \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

prosto rekurzivna.

3. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije

$$f(x) = \left\lfloor \frac{2^{x^2} \cdot x!}{3} \right\rfloor.$$

(Smatra se da su mašine radjene na vežbama poznate, kao i da tražena mašina treba da radi u sistemu $*|(x)* \rightarrow *|(f(x))*$.)

4. Data je funkcija $g(x) = 2^x + x^3$, kao i funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0), \\ f(x+1) &= 2^{g(f(x))} + 1, \end{aligned}$$

za sve $x \geq 0$. Naći Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije $f(x)$ (važe iste napomene kao i u prethodnom zadatku).

RAD TRAJE **120** MINUTA.

SVAKI ZADATAK VREDI **25** POENA.