B042: ANALIZA ALGORITAMA

4. JUL 2006.

[**20**] **1.** Ako je $n > 0$ i p prost broj, kažemo da prirodan broj d ima $\underline{(n,p)\text{-svojstvo}}$ ako $d \mid pn^2$ i $n^2 + d$ je potpun kvadrat.

Funkcija $f(x,y)$ je definisana na sledeći način: ako je $x > 0$ i y je prost broj, i postoji $d \in \mathbb{N}$ koji ima (x,y)-svojstvo, tada je vrednost $f(x,y)$ jednaka ***najmanjem prirodnom broju sa*** (x,y)***-svojstvom***. U svim drugim slučajevima, definišemo da je $f(x,y) = 0$. Dokazati da je $f(x,y)$ prosto rekurzivna funkcija.

[**15**] **2.** Neka $\sigma(n)$ označava zbir svih delitelja prirodnog broja $n > 0$ (za $n = 0$ definišemo $\sigma(0) = 0$). Prirodan broj $n > 0$ je ***jak*** ako za sve $1 \leqslant k < n$ važi

$$\frac{\sigma(k)}{k} < \frac{\sigma(n)}{n}\,.$$

Dokazati da je skup svih jakih brojeva prosto rekurzivan.

[**15**] **3.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije

$$f(x,y,z) = (x+y)yz + \left\lfloor \frac{x!+1}{z^{y+1}+2} \right\rfloor + \lfloor z\sqrt{2006} \rfloor.$$

[**20**] **4.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za uneti prirodan broj n izračunava najmanji prost faktor broja $2^{2^n} + 1$.

[**30**] **5.** Definisati problem SAT i probleme k-SAT, $k \geqslant 1$ [**5** poena], a zatim dokazati **NP**-kompletnost problema 3-SAT [**25** poena].

RAD TRAJE **180** MINUTA.

VREDNOST ZADATAKA JE NAZNAČENA PORED REDNIH BROJEVA.

REZULTATI ĆE BITI OBJAVLJENI U **ČETVRTAK, 6.7.** U **9:00**.

UPISIVANJE OCENA, RAZMATRANJE ŽALBI I EVENTUALNI USMENI DEO ISPITA (ZA STUDENTE PO PROGRAMIMA PRE 2002. GODINE) JE <u>ISTOG DANA</u> U **10:00**.