

**Dal' su prave krivudave?**  
**Esej o geometriji**

Dragan Mašulović  
Department za matematiku i informatiku  
Univerzitet u Novom Sadu

## O čemu će biti reči

---

*Geometria est archetypus  
pulchritudinis mundi*

Johannes Kepler

Na prvi pogled, ovo će biti predavanje o geometriji. Zapravo, govorićemo o osnovama matematike.

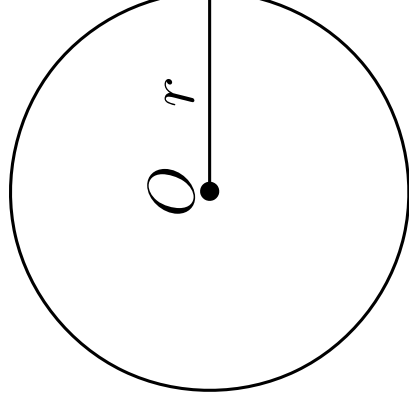
Geometrija će poslužiti samo kao veoma pogodan jezik kojim ćemo izložiti ideje koje su značajne za celokupnu matematiku.

**Pitam se pitam...**

---

Počnimo jednim lakim pitanjem:

*Šta je krug?*



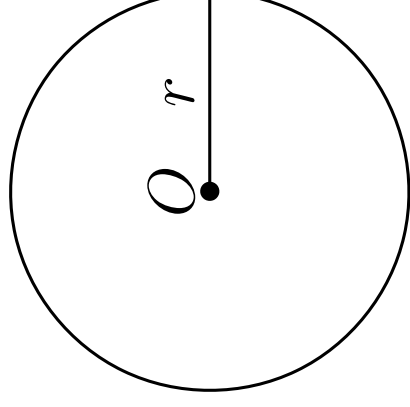
**Pitam se pitam...**

---

Počnimo jednim lakim pitanjem:

*Šta je krug?*

*Odgovor:* Krug sa centrom  $O$  i poluprečnikom  $r$  je skup svih tačaka  $M$  u ravni takvih da je  $|OM| = r$ .



**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*



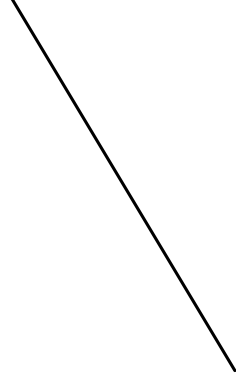
**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*

*Pokušaj 1: **OVO** je prava →*



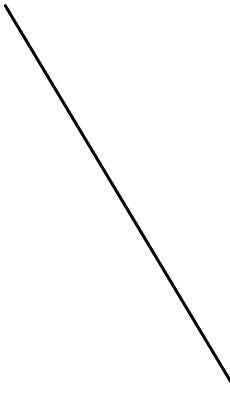
**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*

*Pokušaj 2: Prava je pravolinijski niz tačkaka.*



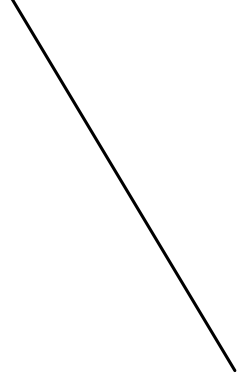
**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*

*Pokušaj 3: Prava je skup tačaka u ravni kod koga se iz profila vidi samo jedna tačka.*



**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*

*Pokušaj 4: Prava je osnovni geometrijski pojam koji se ne definiše.*



**Pitam se pitam...**

---

Evo još jednog (lakog?) pitanja:

*Šta je prava?*

*Pokušaj 5: Prava se dobija produžavanjem duži, a duž je najkraće rastojanje između dve tačke.*

## **Pitam se pitam... Zaključak**

---

Izgleda da je lakše definisati krug nego pravu. Kako je to moguće?

## **Pitam se pitam... Zaključak**

---

Izgleda da je lakše definisati krug nego pravu. Kako je to moguće?

Krug se definiše preko jednostavnijih pojmova kao što su skup, ravan, tačka i rastojanje.

## Pitam se pitam... Zaključak

---

Izgleda da je lakše definisati krug nego pravu. Kako je to moguće?

Krug se definiše preko jednostavnijih pojmova kao što su skup, ravan, tačka i rastojanje.

S druge strane, prava je jedan od najjednostavnijih geometrijskih objekata, pa je ne možemo definisati preko jednostavnijih, kad jednostavnijih nema!

## Definicije u matematici

---

Kako se, onda, definišu najjednostavniji objekti, oni od kojih nema jednostavnijih?

## Definicije u matematici

---

Kako se, onda, definišu najjednostavniji objekti, oni od kojih nema jednostavnijih?

Postoje **dve** vrste definicija u matematici:

- eksplicitne definicije, i
- *implicitne definicije*.

## Definicije u matematici

---

Eksplicitna definicija izgleda ovako:

**Definicija.** Krug sa centrom  $O$  i poluprečnikom  $r$  je skup svih tačkaka  $M$  u ravni takvih da je  $|OM| = r$ .

## Definicije u matematici

---

Eksplicitna definicija izgleda ovako:

**Definicija.** Krug sa centrom  $O$  i poluprečnikom  $r$  je skup svih tačaka  $M$  u ravni takvih da je  $|OM| = r$ .

Implicitne definicije su **definicije putem aksioma** (aksiomatskih sistema).

## Aksiomatski sistem

---

*Aksiomatski sistem* je spisak osobina osnovnih objekata teorije.

## Aksiomatski sistem

---

*Aksiomatski sistem* je spisak osobina osnovnih objekata teorije.

Svi osnovni objekti teorije se definišu odjednom.

## Aksiomatski sistem

---

*Aksiomatski sistem* je spisak osobina osnovnih objekata teorije.

Svi osnovni objekti teorije se definišu odjednom.

Aksiomatski sistem ne propisuje kako osnovni objekti *izgledaju*, već kako se *ponašaju*.

## Aksiomatizacija geometrije

---



Euklid

325 p.n.e. – 265 p.n.e.



David Hilbert

1862 – 1943

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

- 1.1 Za svake dve različite tačke  $A$  i  $B$  postoji tačno jedna prava  $a$  takva da je  $A, B \in a$ .
- 1.2 Za svaku pravu  $a$  postoje bar dve razne tačke  $A$  i  $B$  takve da je  $A, B \in a$ .
- 1.3 Za svake tri nekolinearne tačke  $A, B$  i  $C$  postoji tačno jedna ravan  $\alpha$  tako da je  $A, B, C \in \alpha$ .
- 1.4 Za svaku ravan  $\alpha$  postoji tačka  $A$  takva da  $A \in \alpha$ .
- 1.5 Ako prava  $a$  i ravan  $\alpha$  imaju dve zajedničke tačke onda je  $p \subset \alpha$ .
- 1.6 Ako dve ravni  $\alpha$  i  $\beta$  imaju zajedničku tačku, onda imaju bar još jednu zajedničku tačku.
- 1.7 Postoje četiri tačke koje ne pripadaju istoj ravni.

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

- 2.1  $(\cdot - \cdot - \cdot)$  je definisana na trojkama tačaka i ako je  $(A - B - C)$  onda su  $A$ ,  $B$  i  $C$  različite.
- 2.2 Ako je  $(A - B - C)$  onda je  $(C - B - A)$ , ali nije  $(A - C - B)$ .
- 2.3 Za svaki par raznih tačaka  $A$  i  $B$  postoji tačka  $C$  takva da je  $(A - B - C)$ .
- 2.4 Ako su  $A$ ,  $B$  i  $C$  tri različite kolinearne tačke, onda važi bar jedna od sledeće tri relacije:  $(A - B - C)$ ,  $(A - C - B)$ ,  $(C - A - B)$ .
- 2.5 [Pašova aksioma]

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

- 3.1 “ $\cong$ ” je definisana na parovima tačaka i to je relacija ekvivalencije.
- 3.2 Ako je  $(A, B) \cong (C, D)$  i  $A = B$  onda je  $C = D$ .
- 3.3 Ako je  $(A - C - B)$ ,  $(A' - C' - B')$ ,  $(A, C) \cong (A', C')$  i  $(B, C) \cong (B', C')$  onda je  $(A, B) \cong (A', B')$ .
- 3.4 Ako su  $A, B$  i  $C, D$  dva para različitih tačaka, onda postoji tačka  $E$  takva da je  $(A, B) \cong (C, E)$  i  $\neg(E - C - D)$ .
- 3.5 Ako su  $A, B, C$  nekolinearne tačke i  $A', B'$  leže na ivici poluravni, onda postoji tačka  $C'$  u poluravni takva da je  $(A, B, C) \cong (A', B', C')$ .
- 3.6 Neka su  $A, B, C$  i  $A', B', C'$  dve trojke nekolinearnih tačaka. Ako su  $D, D'$  tačke takve da  $\neg(D - B - C)$ ,  $\neg(D' - B' - C')$ ,  $(A, B, C) \cong (A', B', C')$  i  $(B, D) \cong (B', D')$ , onda je  $(A, D) \cong (A', D')$ .

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

- 4.1 Ako je  $[A_1B_1]$ ,  $[A_2B_2]$ , ... niz duži takav da je  $[A_iB_i] \supseteq [A_{i+1}B_{i+1}]$  za svako  $i$ , onda postoji tačka  $X$  koja pripada svakom intervalu  $[A_iB_i]$ .
- 4.2 Za svake dve duži  $[AB]$  i  $[PQ]$  postoji prirodan broj  $n$  takav da je  $n \cdot [AB] \geq [PQ]$
- 5.1 Ako tačka  $A$  ne pripada pravoj  $b$ , onda postoji tačno jedna prava  $a$  takva da  $A \in a$  i  $a \cap b = \emptyset$ .

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

Kao što vidimo, nijedan element aksiomatskog sistema euklidske geometrije ne insistira na tome da je prava “pravolinijski niz tačaka” .

## Aksiomatski sistem euklidske geometrije

---

Kao što vidimo, nijedan element aksiomatskog sistema euklidske geometrije ne insistira na tome da je prava “pravolinijski niz tačaka” .

**Zapravo, postoje modeli euklidske geometrije u kojima prava uopšte ne liči na sebe!**

# Modeli aksiomatskog sistema euklidske geometrije

---

- Intuitivni model

## Modeli aksiomatskog sistema euklidske geometrije

---

- Intuitivni model      Rene Dekart (1596 – 1650)
- Dekartov model



## Modeli aksiomatskog sistema euklidske geometrije

---

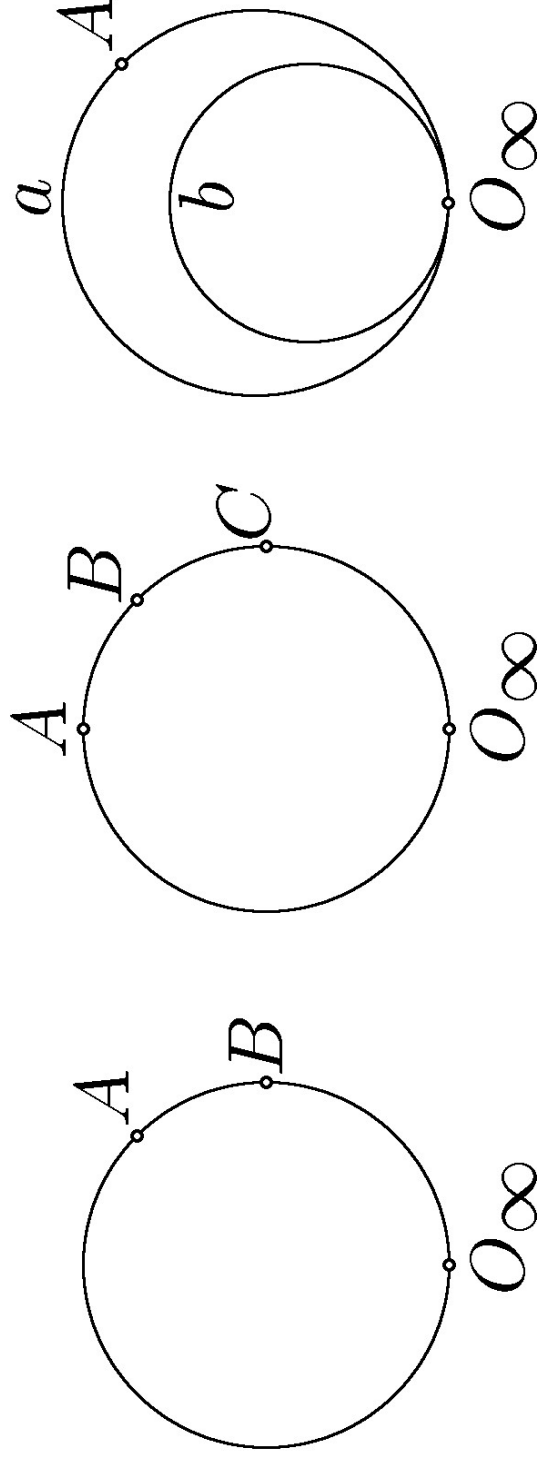
Parabolički model:

- “Tačke” su sve tačke prostora, osim unapred uočene tačke  $O_\infty$ ;
- “Prave” su sve prave i kružnice koje prolaze kroz tačku  $O_\infty$ ;
- “Ravni” su sve ravni i sfere koje prolaze kroz tačku  $O_\infty$ .

# Modeli aksiomatskog sistema euklidske geometrije

---

Parabolički model zadovoljava Aksiome 1.1, 2.3 i 5.1:



## Modeli aksiomatskog sistema euklidske geometrije

---

Krug opisan oko trougla  $ABC$  u paraboličkom modelu:

