HILBERTOV HOTEL, UVODNO PREDAVANJE

DR NENAD TEOFANOV

Prvo predavanje je posvećeno postepenom uvođenju koncepta skupa koji sadrži beskonačno mnogo elemenata. Osnovne ideje o beskonačnim skupovima na intuitivno najjasniji način je moguće ilustrovati posmatrajući skup prirodnih brojeva. Stoga smo se opredelili za hronološki pristup u ovom predavanju.

1. Pitagora i Euklid

Putovanje do Hilbertovog hotela započinjemo Pitagorinom fasciniranošću brojevima i njihovim unutrašnjim svojstvima. Tek se u antičkoj Grčkoj pojam broja izdvojio od svake pojedinačne konkretne realizacije broja nečega. To pojmovno odvajanje ideje broja od njegove konkretne primene omogućilo je da se proučavaju svojstva izvesnih skupina brojeva i uvedu pojmovi kojima se one označavaju, kao što je, na primer, pojam prostog broja. Drugi primer su *sprijateljeni brojevi*.

Dva broja su sprijateljena ako je zbir delitelja jednog od njih jednak drugom i obratno (pri čemu se posmatrani broj ne računa u svoje delitelje). Tako su brojevi 220 i 284 sprijateljeni jer su delioci broja 220 elementi skupa $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ i važi

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$$

kao i

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220,$$

a elementi skupa $\{1, 2, 4, 71, 142\}$ su delioci broja 284 .

Spisak tragača sprijateljenih brojeva uključuje poznate matematičare. Na primer, Pjer Ferma je znao da su 17296 i 18413 sprijateljeni (1636. godine), a Leonard Ojler je znao tridesetak parova sprijateljenih brojeva (1747. godine). Istorija beleži i otkrivače formula kojima se dobijaju sprijateljeni brojevi. Jednu takvu formulu je otkrio Tabit Ibn Kora, arapski matematičar iz IX veka. Pre tridesetak godina bilo je poznato više od hiljadu parova sprijateljenih brojeva, a danas ih je poznato preko dvanaest miliona, [1].

Ideja faktorisanja broja na činioce je produbljena faktorisanjem na proste činioce $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$, $284 = 4 \cdot 71$. Prosti brojevi (oni koji su deljivi samo sa jedinicom i samim sobom) tako igraju glavnu ulogu u izgradnji celih brojeva i u širokoj i atraktivnoj grani matematike poznatoj kao teorija brojeva.

Euklid u čuvenim Elementima navodi uputstvo za dobijanje prostog broja koji se ne nalazi u unapred zadatom skupu prostih brojeva. Modernije rečeno, Euklid daje algoritam za konstrukciju prostih brojeva, kojim se takođe dokazuje i da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Pojam beskonačnosti u antičkoj matematici ne postoji, te tako Euklid kaže da prostih brojeva ima "više od bilo koje zadate količine brojeva".

Danas su prosti brojevi atraktivni zbog široke primene u kriptografiji, ali i zbog primamljive nagrade od milion dolara za dokaz (ili za obaranje) Rimanove hipoteze koja je direktno povezana sa problemom raspodele prostih brojeva, [2], [3], [4].

2. Nikola Kuzanski

Kao što je navedeno, antički mislioci nisu bili u stanju da rasuđuju o beskonačnosti u matematičkim problemima (iako su pojam večnosti smatrali razumljivim, pa je tako zbog prevara i laganja Sizifu bilo određeno da u podzemnom svetu večno gura tešku stenu uzbrdo, koja bi se potom s vrha brda otkotrljala do dna, te bi je Sizif morao ponovo gurati uzbrdo).

Tek se pojavom Hrista Spasitelja i prihvatanjem njegove misije um učenih ljudi počeo obuhvatnije baviti idejom beskonačnosti. Značajni doprinos našoj priči dao je Nikola Kuzanski u XV veku. Njegova razmišljanja o pojmu beskonačnosti i svojstvima tog pojma, izložene u delu "O učenom neznanju" (*De docta ignorantia*, 1440. godine) otvorila su vrata kroz koja je oko 250 godina kasnije provirio Lajbnic. Beskonačno male i beskonačno velike promenljive su osnov Njutn-Lajbnicovog računa iz kojeg se razvila matematička analiza kao samostalna oblast matematičkih nauka.

Klicu modernog shvatanja pojma beskonačnosti posejao je i Galileo Galilej krajem XVI veka. Galilej je utvrdio da su "pojmovi manji ili veći i jednakost neprimenljivi na beskonačnost" i navodi primer da ako posmatramo preslikavanje koje prirodnom broju dodeljuje njegov kvadrat, primećujemo da svakom broju odgovara tačno jedan broj koji je njegov kvadrat i obratno, svaki broj koji je kvadrat nekog prirodnog broja odgovara tačno jednom broju čijim se kvadriranjem on dobija.

Na ovaj način Galileo je implicitno postavio pitanje o uzajamno jednoznačnoj korespondenciji (bijekciji) između beskonačnih skupova. Krajem XIX veka Kantor daje odgovor i zasniva matematičku oblast koju danas nazivamo teorija skupova.

Što se tiče konačnih skupova, jasno je da između dva konačna skupa postoji bijekcija ako i samo ako oni imaju isti broj elemenata. *Kardinalni broj* konačnog skupa se definiše kao broj njegovih elemenata, pa su tako skupovi sa istim brojem elemenata iste kardinalnosti. Ova činjenica se primenjuje u "principu kaveza za golubove" po kojem, ako imamo n kaveza i $n+1$ goluba u njima, onda postoji barem jedan kavez u kojem se nalaze barem dva goluba. Princip kaveza za golubove spada u osnovne principe kombinatorike, [5].

Primer primene principa kaveza za golubove: Da li se među bilo kojih 100 brojeva može izabrati 15 (odnosno 16) brojeva tako da je razlika bilo koja dva od njih deljiva brojem 7?

Odgovor: Razlika dva broja je deljiva brojem 7 ako oni imaju isti ostatak pri deljenju sa brojem 7. Kako je $100 = 7 \cdot 14 + 2$ sledi da, ako su "kavezi" rezervisani za brojeve koji imaju isti ostatak pri deljenju brojem 7, a "golubovi" izabrani brojevi, među 100 izabranih brojeva možemo u različite "kaveze" staviti po 14, što je 98 brojeva, pa se preostala 2 broja moraju smestiti u barem jedan od "kaveza", odnosno odgovor na prvo pitanje je pozitivan. Sa druge strane, ne mora da znači da se među izabranim brojevima nalazi 16 takvih brojeva.

Na osnovu jednog drugog osnovnog principa kombinatorike, principa proizvoda, može se dokazati da je broj elemenata partitivnog skupa skupa od n elemenata jednak sa 2^n, $n \in \mathbb{N}$. Partitivni skup bilo kojeg konačnog skupa je veće kardinalnosti od tog skupa. Za razliku od principa kaveza za golubove, ovo svojstvo će se preneti na skupove beskonačne kardinalnosti o čemu će biti reči u nastavku predavanja.

Literatura

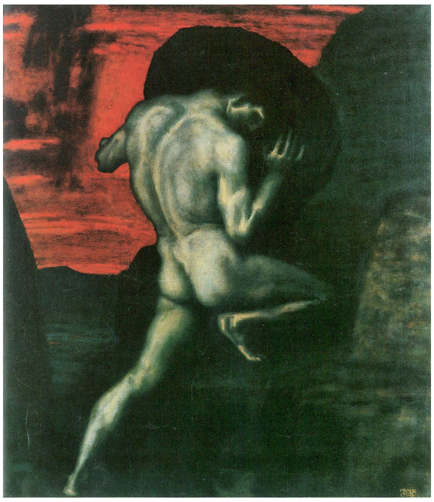
[1] Na stranici http://amicable.homepage.dk/knwnc2.htm postoji spisak koji je ažuriran do kraja septembra 2007. godine, pogledajte i http://www.shyamsundergupta.com/amicable.htm

[2] http://www.math.unipd.it/ languasc/lavoripdf/R8eng.pdf , http://www.sans.org/reading_room/whitepapers/vpns/prime-numbers-public-key-cryptography_969

[3] http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

[4] http://plus.maths.org/issue49/package/index.html, http://www.claymath.org/posters/primes/

[5] http://www.youtube.com/watch?v=GPBNQEHm4h8, http://www.cs.duke.edu/ pengshi/math149/talk_pigeonhole.pdf, http://mindyourdecisions.com/blog/2008/11/25/16-fun-applications-of-the-pigeonhole-principle/.




OFFICIAL
SOUVENIR
Hilbert's
HOTEL
Home of the famous
endless buffet line
MathematiciansPictures.com